PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 5 — 1. März 1928 — Redaktionsschluß für Nr. 7 am 5. April 1928. — 29. Jahrgang

INHALT:

Originalmitteilungen:

P. Debye und H. Falkenhagen, Dispersion von Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstante bei starken Elektrolyten. S. 121.

K. F. Niessen, Das asymmetrische Zweizentrenproblem nach der Wellenmechanik und ihre Anwendung auf die Kristalltheorie (Streuvermögen der Atome). S. 132.

K. Ch. Kar und M. Ghosh, Über die Brownsche Bewegung. S. 143.

L. Infeld, Zur Feldtheorie von Elektrizität und Gravitation. S. 145.

H. Maurer, Die Bilder im Winkelspiegel. S. 147.

O. Feußner, Bemerkung zu der Arbeit der Herren R. Jaeger und A. Kußmann über Gleichstromverstärkung, ihre Anwendung zu Meßzwecken und ihre Grenzen. S. 149.

R. Jaeger und A. Kußmann, Erwiderung auf vorstehende Bemerkung. S. 149.

O. Feußner, Schlußwort. S. 150.

Besprechungen:

F. R. Moulton, Einführung in die Himmelsmechanik. S. 150.

H. Maldau, Technische Navigation und Meteorologie. S. 150.

E. Mosch, Lehrbuch der Physik. S. 151.

J. Frenkel, Lehrbuch der Elektrodynamik. S. 151.

A. Kistner, Deutsche Meister der Naturwissenschaft und Technik. S. 152.

W. Gerlach, Materie, Elektrizität, Energie. S. 152.

Tagesereignisse. S. 152.

Personalien. S. 152.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Dispersion von Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstante bei starken Elektrolyten[1]).

Von P. Debye u. H. Falkenhagen.

Wie in dieser Arbeit gezeigt werden soll, existiert für die Ionenbewegung in starken Elektrolyten eine Relaxationszeit, welche für die Dispersion der Leitfähigkeit und der Dielektrizitätskonstante von Wichtigkeit ist. Es soll hier versucht werden, die Verhältnisse zwar nicht vollkommen streng, aber doch so zu behandeln, daß das Charakteristische der zu erwartenden Erscheinung getroffen wird. An einige prinzipielle Punkte der Theorie der starken Elektrolyte mag zunächst erinnert werden[2]).

Die wesentlichsten Kräfte besonders in verdünnten Lösungen zwischen den Ionen sind die Coulombschen Kräfte. Greifen wir ein Ion einer bestimmten Sorte heraus, so wird sich dieses infolge der Wärmebewegung — von äußeren Kräften auf die Ionen sehen wir zunächst ab — in irgendeiner komplizierten Weise bewegen. In jedem Zeitmoment seiner Bewegung denken wir uns den Radiusvektor r von dem Ion aus gezogen. Die Länge und Richtung dieses Fahrstrahls sei während der Bewegung des Ions dauernd dieselbe. Am Ende von r stellen wir uns ein kleines Volumenelement dS vor, in dem von Zeit zu Zeit überschüssige Ladungen vorhanden sein werden. In den verschiedenen Zeitmomenten ist die Ladungsmenge von dS eine verschiedene. Zu gewissen Zeiten wird sie positiv, zu anderen Zeiten negativ sein. Wir bilden jetzt den zeitlichen Mittelwert der elektrischen Ladung in dS dividiert durch dS, d. h. die elektrische zeitlich gemittelte Ladungsdichte des betrachteten Volumenelementes; diese so aufzufassende Größe nennen wir im folgenden stets schlechthin die Dichte der Ionenatmosphäre. Als Folgerung des Maxwell-Boltzmannschen Prinzips, das ja in dem betrachteten Falle des statistischen Gleichgewichtes Gültigkeit besitzt, ergibt sich dann, daß die Dichte der Ionenatmosphäre z. B. um ein positives Ion stets negativ und außerdem zentrisch symmetrisch ist. Die Gesamtladung dieser Ionenatmosphäre muß natürlich entgegengesetzt gleich der Ladung des markierten Ions sein. Dieser Umstand bewirkt, daß das Potential um das herausgegriffene Ion, welches bei unendlicher Verdünnung das Coulombsche ist, bei endlicher Konzentration von dem Coulombschen abweicht. Auf der mit der Existenz dieser Atmosphäre unmittelbar verknüpften Ionenenergie ist die Thermodynamik der starken Elektrolyte aufgebaut worden. Es ist aber auch möglich geworden, die Grenzgesetze der Leitfähigkeit starker Elektrolyte, die bei großer Verdünnung gelten, unter Zugrundelegung der eben entwickelten Gedankengänge zu deuten. Bewegt sich ein Ion unter dem Einflusse eines elektrischen Feldes, so

1) Vorgetragen in der Sitzung des Gauvereins Thüringen-Sachsen-Schlesien der Deutschen Physikalischen Gesellschaft am 7. Januar in Halle.

2) s. P. Debye und E. Hückel, Physik. Zeitschr. **24**, 185, 305, 1923 und die Diskussion über starke Elektrolyte: Transactions Faraday Society, April 1927. S. 334—544.

wird seine Beweglichkeit davon abhängen, ob und wieviel Ionen in seiner Umgebung vorhanden sind. Einmal wird die Stokessche Reibung verändert, was früher als kataphoretische Wirkung bezeichnet wurde. Zweitens wird die Ionenatmosphäre ihre zentrische Symmetrie einbüßen. Beide Einflüsse verkleinern die Beweglichkeit.

In dieser Notiz soll durchweg auf die Berücksichtigung der kataphoretischen Wirkung verzichtet werden und nur die Dissymmetrie der Ionenwolke bei wechselnder Frequenz untersucht werden. Infolgedessen können die Resultate nur qualitativ sein. Wir werden in einer späteren Notiz die nötigen Verbesserungen anbringen und glauben, durch dieses Verfahren zu einem leichteren Verständnis zu verhelfen.

Bewegt man ein Ion mit konstanter Geschwindigkeit durch die Flüssigkeit, so tritt infolge der erwähnten Dissymmetrie eine bremsende Kraft auf. Sie ist deshalb vorhanden, weil die Dichteverteilung in der Ionenwolke zu ihrer Erzeugung oder Vernichtung eine wenn auch kleine, so doch endliche Zeit braucht. Es ist daher von vornherein zu erwarten, daß eine merkliche Dispersion auftreten sollte, wenn die Zeitdauer der Schwingungen, mit denen gemessen wird, vergleichbar ist mit jener Relaxationszeit. Bekanntlich hat Onsager darauf hingewiesen, daß die Ionen neben ihrer geradlinigen Bewegung noch Brownsche Bewegungsschwankungen ausführen, welche auf die Größe der Relaxationszeit einen Einfluß ausüben. Hierauf beruht seine Verbesserung der Formeln für die Leitfähigkeit. Auch von dieser letzteren Verfeinerung sehen wir in dieser Notiz ab. Die in Aussicht gestellte zweite Notiz wird diesen Punkt ebenfalls mit berücksichtigen.

Es mögen sich in der Lösung von den Ionen der Sorte $1 \ldots p \ldots s$ mit den Ladungen $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_p \ldots \varepsilon_s$ im Volumenelement dS im zeitlichen Mittel $\bar{n}_1 dS \ldots \bar{n}_p dS \ldots \bar{n}_s dS$ befinden. Ferner bedeute D die Dielektrizitätskonstante des Lösungsmittels, T die absolute Temperatur der Lösung, k die bekannte Boltzmannsche Konstante

$$(k = 1{,}372 \cdot 10^{-16}\ \text{erg/grad})$$

und $\varkappa^2$ die für die Theorie der starken Elektrolyte charakteristische Größe:

$$\varkappa^2 = \frac{4\pi}{DkT} \sum \bar{n}_p \varepsilon_p^2. \tag{1}$$

Ferner sei v_p die konstante Geschwindigkeit des Ions der Sorte p und $\varrho_p v_p$ die Stokessche Reibungskraft. Führt man die Abkürzungen ein

$$\omega_p = \bar{\varrho} \frac{v_p}{kT}$$
$$\bar{\varrho} = \frac{\sum \bar{n}_p \varepsilon_p^2 \varrho_p}{\sum \bar{n}_p \varepsilon_p^2}, \tag{2}$$

so folgt für diese zusätzliche Kraft, die im allgemeinen klein ist gegenüber der Stokesschen Reibungskraft der Wert:

$$-\varepsilon_p^2 \frac{\omega_p}{6D} \varkappa. \tag{3}$$

Die Größe $\frac{1}{\varkappa}$ hat die Dimension einer Länge, die charakteristisch ist für die Dichteverteilung in der Ionenwolke. Sie wird im folgenden manchmal als Dicke der Ionenatmosphäre (Größenordnung in cm: 10^{-8} dividiert durch Wurzel aus Konzentration in Mol pro Liter) bezeichnet werden.

I. Die Rolle der Relaxationszeit für nichtstationäre Fälle.

(Beispiel eines verschwindenden Gleichgewichtszustandes).

Wir wollen uns zunächst folgender einfacher Fragestellung zuwenden, auf die der eine von uns schon einmal kurz eingegangen ist[1]). Wir denken uns eine Ladung E von kleinen Dimensionen an einer bestimmten Stelle des Elektrolyten. Die symmetrische Ionenatmosphäre, die der Verteilung des Potentials um das ruhende Ion entspricht, möge ihren Gleichgewichtszustand, der durch das Maxwell-Boltzmannsche Prinzip bestimmt ist, erreicht haben. In einem bestimmten Augenblick ($t = 0$) denken wir uns die Zentralladung E fortgenommen. Es fragt sich, nach welchem Gesetz strebt die Ladungsdichte der Ionenatmosphäre gegen Null. Mit der Maxwell-Boltzmannschen Verteilungsfunktion kommen wir jetzt nicht mehr aus. Wir müssen vielmehr auf die in der Seite 121 zitierten Arbeit entwickelten allgemeinen Grundgleichungen, die auf der verallgemeinerten Gleichung für die Brownsche Bewegung beruhen, zurückkommen. Die zeitliche Änderung der Anzahl der Ionen der Sorte p hat zwei Ursachen; einmal wird sich diese infolge der Wärmebewegung ändern, zweitens wird eine auf die Teilchen wirksame Kraft $\mathfrak{K}$ die Zahl der Teilchen in einem festzudenkenden Volumenelement ändern. Schreibt man sich den mathematischen Ausdruck auf, der diesen nicht stationären Vorgang beherrscht, so findet sich für ihn die Gleichung:

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\frac{kT}{\varrho_p} \operatorname{grad} n_p - \frac{n_p \mathfrak{K}}{\varrho_p}\right). \tag{4}$$

Wir wollen nun annehmen, daß wir es mit einer sehr verdünnten Lösung zu tun haben. Wir können dann in den Ausdruck, der $\mathfrak{K}$ enthält, für n_p den Wert $\bar{n}_p$ einführen, welchem die n_p in größerer Entfernung vom hervorgehobenen Ion

1) P. Debye, Transactions Faraday Society, April 1927, S. 334.

zustreben. Benutzt man diese Vereinfachung, so geht die Gleichung (4) über in

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\frac{kT}{\varrho_p}\operatorname{grad} n_p - \frac{n_p \mathfrak{K}}{\varrho_p}\right). \quad (5)$$

Äußere Kräfte mögen für den jetzt behandelten Fall auf die Ionen nicht einwirken. Wir wollen daher nur innere aus einem Potential Φ ableitbare Kräfte annehmen, die wir setzen können

$$\mathfrak{K} = -e_p \operatorname{grad} \Phi.$$

Ferner setzen wir

$$n_p = n_p + \nu_p \quad (6)$$

und erhalten also für die Abweichung der Anzahl der Ionen ν_p der Sorte p von dem konstanten Wert n_p folgende Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \nu_p}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\frac{kT}{\varrho_p}\operatorname{grad}\nu_p + n_p\frac{e_p}{\varrho_p}\operatorname{grad}\Phi\right). \quad (7)$$

Hinzu tritt die Poissonsche Gleichung

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi = -\frac{4\pi}{D}\sum e_p \nu_p. \quad (8)$$

Für die Erfassung des Verschwindens des Gleichgewichtszustandes wollen wir das Problem insofern vereinfachen, als wir den Fall des einwertigen KCl herausgreifen, für das die Ionen gleiche Beweglichkeit besitzen. Für diesen Spezialfall gilt folglich

$$\begin{aligned} n_1 = n_2 = n; \quad & e_1 = E; \quad & e_2 = -E; \\ \nu_1 = f; \quad & \nu_2 = -f; \quad & \varrho_1 = \varrho_2 = \varrho. \end{aligned} \quad (9)$$

Die grundlegenden Differentialgleichungen lauten demnach für dieses uns weiter interessierende Beispiel

$$\frac{\varrho}{kT}\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f + \frac{nE}{kT}\Delta\Phi \quad (10)$$

$$\Delta\Phi = -\frac{8\pi E}{D} f. \quad (11)$$

Führen wir die charakteristische Größe (1) ein, die sich jetzt vereinfacht zu:

$$\varkappa^2 = \frac{8\pi n E^2}{DkT},$$

so entsteht aus (10) nach Einführung von $\Delta\Phi$ aus (11) für die Gleichung, die die zeitliche Änderung von f beherrscht

$$\frac{\varrho}{kT}\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f - \varkappa^2 f. \quad (12)$$

Diese Gleichung (12) besitzt eine Gestalt, welche erinnert an diejenige, die die Wärmeleitungsvorgänge beschreibt. Wir wollen sie zunächst dimensionslos schreiben, indem wir eine Zeit Θ einführen, die für alle nichtstationären Vorgänge von Bedeutung ist und die wir Relaxationszeit nennen wollen. Wir setzen also

$$\frac{\varrho}{\varkappa^2 kT} = \Theta; \quad (13)$$

$$\varkappa r = s; \quad \frac{t}{\Theta} = \tau. \quad (14)$$

In diesen so eingeführten dimensionslosen Größen erhalten wir folgende partielle Differentialgleichung für f

$$\frac{1}{s^2}\frac{\partial}{\partial s}s^2\frac{\partial f}{\partial s} - f = \frac{\partial f}{\partial \tau}. \quad (15)$$

Zur Zeit $t = 0$ ist $f = f_0$ bekannt; dabei gilt

$$f_0 = \frac{D}{8\pi E}\varkappa^2\Phi_0 = \frac{\varkappa^3}{8\pi}\frac{e^{-s}}{s}. \quad (16)$$

Ein Ausdruck für f, der allen Bedingungen genügt, ist der folgende

$$f = -\frac{\varkappa^3}{8\pi}\frac{e^{-s}}{s}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{1}{2}\sqrt{\tau}-\frac{s}{2\sqrt{\tau}}}^{\infty} e^{-x^2}dx. \quad (17)$$

Es handelt sich jetzt nur noch darum, diesen Ausdruck zu diskutieren. Man erkennt zunächst, da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} \quad (18)$$

ist, daß f für $t = 0$ in f_0 übergeht. Für alle anderen Zeiten t kann man das Integral

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{1}{2}\sqrt{\tau}-\frac{s}{2\sqrt{\tau}}}^{\infty} e^{-x^2}dx = J(\tau, s) \quad (19)$$

leicht berechnen. Kennt man J, so weiß man, wie die Verteilungsfunktion f zu verschiedenen Zeiten t und für verschiedene Werte von s aussieht. Folgende Tabelle I liefert eine Übersicht für einige Werte von J als Funktion von s zu einigen verschiedenen Zeiten $t\left(\tau = \frac{t}{\Theta}\right)$.

Tabelle I.

Werte für $J(\tau, s)$.

s	$\tau = 0{,}25$	$\tau = 1$	$\tau = 4$	se^{-s}
0,2	0,336	0,102	—	0,164
0,4	0,444	0,129	—	0,268
0,5	0,500	0,144	—	0,303
0,6	0,556	0,161	—	0,329
0,8	0,664	0,198	—	0,360
1,0	0,760	0,240	0,0066	0,368
1,2	0,839	0,286	—	0,361
1,4	0,898	0,336	—	0,345
1,6	0,940	0,389	—	0,323
1,8	0,967	0,444	—	0,298
2,0	0,983	0,500	0,017	0,271
2,4	0,996	0,611	—	0,218
2,8	0,999	0,714	—	0,170
3,0	0,999	0,760	0,039	0,149
4,0	0,999	0,921	0,078	0,073
6,0	0,999	0,998	0,240	0,0149
8,0	1	1	0,500	0,0027
10,0	1	1	0,760	0,00045
12	1	1	0,921	

Fragt man, wann $f = \frac{1}{2}$ ist, so lautet die Antwort hierauf: Es ist $f = \frac{1}{2}$, wenn

$$\left|\tau - \frac{s}{2\left|\tau\right.}\right. = 0,$$

oder $$s = 2\tau,$$

oder $$\varkappa t = \frac{2t}{\Theta},$$

oder $$t = \frac{\varkappa r}{2}\Theta \quad \text{ist.}$$

Die Tabelle 1 überzeugt ja sofort auch von dieser einfachen Gesetzmäßigkeit. Wir haben in Tabelle 1 noch se^{-s} in der letzten Spalte aus folgendem Grunde eingetragen: Man übersieht nämlich das Verschwinden des Gleichgewichtszustandes einfacher, wenn man die Menge Elektrizität dQ bildet, die innerhalb der Kugelschale zwischen r und $r + dr$ liegt, und zwar zu verschiedenen Zeiten genommen. Diese ist

$$dQ = 2Ef\,4\pi r^2 dr = -E\varkappa s e^{-s} J dr$$
$$= -yE\varkappa dr, \qquad (20)$$

wobei also

$$y = se^{-s} f(s, \tau) \qquad (21)$$

ist. y ist ein Maß für die Dichte der Ionenwolke zu verschiedenen Zeiten und in einer Kugelschale der Dicke dr in verschiedenen Entfernungen r vom hervorgehobenen Ion. Wir haben in Fig. 1

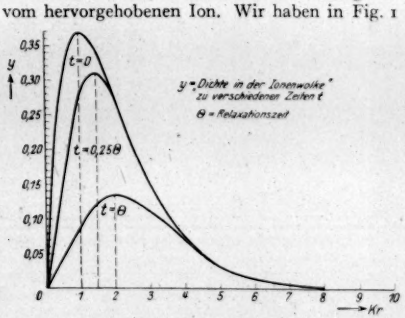


Fig. 1.

y für $\tau = 0$, $\tau = 0{,}25$ und $\tau = 1$ gezeichnet. y besitzt für jede Zeit ein Maximum, das sich mit wachsender Zeit immer mehr zu wachsenden $\varkappa r$-Werten verschiebt, außerdem dabei mehr und mehr abnimmt. So liegt das Maximum der Dichte y, wie wir jetzt schlechthin immer sagen wollen, zur Zeit $t = 0$ bei $\varkappa r_0 = 1$, ferner zur Zeit $t = 0{,}25\,\Theta$ bei $\varkappa r \sim 1{,}5$ und schließlich zur Zeit $t = \Theta$ bei $\varkappa r \sim 2{,}0$. Die Maxima selbst verhalten sich für diese Zeiten rund wie

$$0{,}37 : 0{,}31 : 0{,}14.$$

Aus Fig. 1 erkennt man weiter, wie die Dichte der Ionenwolke zur Zeit $t = \Theta$ schon relativ gering ist gegenüber der ursprünglichen zur Zeit

$$t = 0.$$

Nach der vierfachen Relaxationszeit Θ ist die Dichte schon fast verschwunden. Würden wir nämlich in der Fig. 1 noch die Kurve, die $\tau = 4$ entspricht, gezeichnet haben, so wäre sie kaum von der Abszissenachse zu unterscheiden. Der Maximalwert betrüge für sie nur noch etwa 0,006 und läge etwa bei $\varkappa r = 3{,}5$.

Für die Relaxationszeit gilt nach (13) im Spezialfalle des KCl

$$\Theta = \frac{0{,}553 \cdot 10^{-10}}{\gamma}, \qquad (22)$$

d. h. z. B. für die Konzentration $\gamma = 0{,}001$ Mol/Liter ist Θ von der Größenordnung 10^{-7} sec. Sie hängt stark von der Temperatur ab, da die innere Reibung ja bekanntlich ebenfalls mit wachsender Temperatur stark abnimmt; außerdem ist sie eine Funktion von der charakteristischen Größe $\varkappa$ und damit der Konzentration γ der Lösung. Die Relaxationszeit, die in ganz anderem Zusammenhange in der Theorie der anomalen Dispersion der Dipolflüssigkeiten eine Rolle spielt, ist in gewöhnlichen Fällen bis 1000mal kleiner als die eben genannte. Wir vermuten daher eine Dispersion der Leitfähigkeit und der Dielektrizitätskonstanten in einem relativ leicht zugänglichen Wellenlängengebiet. Experimentell bestehen für diese aus der Theorie gezogene Folgerung in dem von uns behandelten Fall kleiner Feldstärken noch keine Tatsachen. Man kann vermuten, daß die Beobachtungen von M. Wien[1]) über die Abweichungen vom Ohmschen Gesetz bei hohen Feldstärken auch unseren Effekt wahrscheinlich machen, zumal ja Joos[2]) und Blumentritt die Wienschen Beobachtungen wenigstens in ihren Hauptzügen auf Grund der neueren Theorie der Elektrolyte gedeutet haben. Diese Autoren behandeln den stationären Fall mit Berücksichtigung der höheren Potenzen der Feldstärke. Hier wird die Frequenzabhängigkeit für kleine Feldstärken untersucht. Die Überlagerung beider Effekte bildet das allgemeine, noch nicht gelöste Problem.

II. Dispersion der von der Ionenwolke herrührenden Kraftwirkung.

Es handelt sich im folgenden um das Problem, den Leitungs- und Verschiebungsstrom des Elektrolyten auszurechnen unter der Annahme,

1) M. Wien, Ann. d. Phys. **83**, 327—361, 1927 u. Physik. Zeitschr. **28**, 834—836, 1927.

2) G. Joos und M. Blumentritt, Physik. Zeitschr. **28**, 836—838, 1927.

daß die Ionen der Lösung eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz ω ausführen. Auf Grund der Existenz der endlichen Relaxationszeit der Ionenwolke kann man sich leicht anschaulich den Verlauf der Kraftwirkung auf das Ion, soweit sie von der Ionenatmosphäre herrührt als Funktion der Frequenz überlegen. Man erkennt dann, daß mit wachsender Frequenz der Absolutwert dieser Kraft allmählich gegen o hinstrebt. Infolge der Relaxationszeit wird aber auch eine Phasendifferenz zwischen dieser Kraft und der Bewegung des Ions auftreten. Der letztere Umstand bedeutet, daß die Stromdichte auch eine Komponente besitzt, die proportional ist mit der zeitlichen Änderung der elektrischen Feldstärke, also mit einer Phasendifferenz von 90° gegenüber der elektrischen Feldstärke schwingt. Das bedeutet, daß außer dem Leitungsstrom noch ein Verschiebungsstrom existiert. Dieser Verschiebungsstrom steht dann ohne weiteres im Zusammenhange mit der Dielektrizitätskonstante, während der Leitungsstrom die Leitfähigkeit ergibt. Wir gehen in folgender Weise vor. Zunächst greifen wir zurück auf die partiellen Differentialgleichungen (4), die den nichtstationären Fällen zugrunde liegen. Diese beziehen sich auf das ruhende Koordinatensystem X, Y, Z. Da nun die Ionen harmonische Schwingungen ausführen und uns im wesentlichen die auf der Existenz der Ionenatmosphäre beruhenden Kraft auf die Ionen interessiert, die dann im Verein mit der äußeren parallel X wirkenden elektrischen Feldstärke und der Stokesschen Reibungskraft den Verschiebungs- und Leitungsstrom ergibt, ist es zweckmäßig, die partiellen Differentialgleichungen auf ein Koordinatensystem zu beziehen, das sich mit den Ionen mitbewegt und welches wir x, y, z nennen. Die Integration dieser partiellen Differentialgleichungen liefert das Potential und damit die Kraft auf die Ionen. Die Hauptfrage ist also die, wie ändert sich die Kraftwirkung eines schwingenden Ions der Ladung e_p gegenüber der des stationär bewegten Ions ab? Die partiellen Differentialgleichungen, die die nichtstationären Fälle beherrschen, lauten für die Anzahl der Ionen der Sorte p im cm³:

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} = \mathrm{Div}\left(\frac{kT}{\varrho_p}\,\mathrm{Grad}\,n_p - \frac{n_p \mathfrak{K}}{\varrho_p}\right). \qquad (23)$$

Sie beziehen sich zunächst auf das ruhende Koordinatensystem X, Y, Z. Wir haben daher Div und Grad in (23) geschrieben. Es ist von vornherein klar, daß das Potential Φ, das wir für den nichtstationären Fall suchen, ebenfalls in dem sich mit dem hervorgehobenen Ion parallel X mitbewegenden Koordinatensystem keineswegs stationär ist. Die Koordinaten des hervorgehobenen Ions seien ξ, o, o. Dabei ist

$$\xi = a e^{i\omega t}; \qquad \dot{\xi} = a i\omega e^{i\omega t}. \qquad (24)$$

Wir führen jetzt ein Koordinatensystem x, y, z ein, welches sich mit seinem Ursprung im bewegten Ion befindet und sich mit ihm mitbewegt, vermöge der Beziehungen

$$x = X - \xi; \quad y = Y; \quad z = Z; \quad t = t'. \qquad (25)$$

Folglich ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= -\dot{\xi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'}; & \frac{\partial}{\partial X} &= \frac{\partial}{\partial x};\\ \frac{\partial}{\partial Y} &= \frac{\partial}{\partial y}; & \frac{\partial}{\partial Z} &= \frac{\partial}{\partial z}; \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} &\mathrm{div} = \mathrm{Div};\\ &\mathrm{grad} = \mathrm{Grad}. \end{aligned} \qquad (26)$$

Unsere Differentialgleichungen lauten in bezug auf dieses Koordinatensystem (dabei ist der Strich bei t wieder fortgelassen)

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} - \dot{\xi}\frac{\partial n_p}{\partial x} = \mathrm{div}\left(\frac{kT}{\varrho_p}\,\mathrm{grad}\,n_p - \frac{n_p \mathfrak{K}}{\varrho_p}\right). \qquad (27)$$

Für die Kraft $\mathfrak{K}$ können wir schreiben

$$\mathfrak{K} = e_p \mathfrak{E} - e_p \,\mathrm{grad}\,\Phi. \qquad (28)$$

Folglich geht das System der Gleichungen (27) über in

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial n_p}{\partial t} - \dot{\xi}(t)\frac{\partial n_p}{\partial x}\\ &= \mathrm{div}\left(\frac{kT}{\varrho_p}\,\mathrm{grad}\,n_p - \frac{n_p e_p \mathfrak{E}}{\varrho_p} + \frac{n_p e_p\,\mathrm{grad}\,\Phi}{\varrho_p}\right)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\mathrm{div\,grad}\,\Phi = -\frac{4\pi}{D}\sum n_p e_p. \end{aligned}\right| \qquad (29)$$

Für hinreichend verdünnte Lösungen dürfen wir wieder in den beiden letzten Gliedern der Klammer auf der rechten Seite für n_p den konstanten Wert n_p einführen. Die Abweichungen der Ionenzahl der Sorte p im cm³ nennen wir ν_p, setzen also

$$n_p = n_p + \nu_p.$$

Gehen wir mit diesem Ansatz in die Gleichungen (29) ein, so entsteht das System: ($\mathrm{div}\,\mathfrak{E} = 0$)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \nu_p}{\partial t} - \dot{\xi}\frac{\partial \nu_p}{\partial x} = \mathrm{div}\left(\frac{kT}{\varrho_p}\,\mathrm{grad}\,\nu_p + \frac{n_p e_p}{\varrho_p}\,\mathrm{grad}\,\Phi\right)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\mathrm{div\,grad}\,\Phi = -\frac{4\pi}{D}\sum e_p \nu_p. \end{aligned}\right| \qquad (30)$$

Für den Spezialfall $\dot{\xi} = 0$ resultiert hieraus sofort die Maxwell-Boltzmannsche Verteilung:

$$\left.\begin{aligned} \nu_p &= \nu_p = -\frac{n_p e_p}{kT}\Phi_0\\ \Delta\Phi_0 &= \varkappa^2 \Phi_0\\ \Phi_0 &= \frac{e_p}{D}\frac{e^{-\varkappa r}}{r}. \end{aligned}\right| \qquad (31)$$

Im allgemeinen Fall führen wir die Abweichung der Ionenzahl im cm^3 von der stationären ein und bezeichnen dieselbe mit μ_p; ferner nennen wir die Abweichungen des Potentials Φ vom stationären Werte φ. Es gilt also

$$v_p = \bar{v}_p + \mu_p; \quad \Phi = \Phi_0 + \varphi. \tag{32}$$

Wir versuchen nun, das System (30) durch den Ansatz (32) zu befriedigen, wobei $\Phi_0 = \frac{e_p e^{-\varkappa r}}{Dr}$ ist. Wir setzen weiter an:

$$\mu_p = f_p e^{i\omega t} \quad \varphi = v e^{i\omega t}. \tag{33}$$

Für f_p und v folgen dann die Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} i\omega f_p - i\omega a \frac{\partial}{\partial x}\bar{v}_p &= \operatorname{div}\left\{\frac{kT}{\varrho_p}\operatorname{grad} f_p + \frac{n_p e_p}{\varrho_p}\operatorname{grad} v\right\} \\ \Delta v &= -\frac{4\pi}{D}\sum e_p f_p. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Von diesen Gleichungen können wir sofort drei Lösungen (35), (36) und (37) angeben von der Gestalt

$$\left.\begin{aligned} v &= a\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \\ f_p &= -\frac{n_p e_p}{kT} a \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

$$\left.\begin{aligned} v &= A \frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-Kr}}{r} \\ f_p &= -\frac{n_p e_p}{kT}\frac{K^2}{K^2 - \frac{i\omega\varrho_p}{kT}} v \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

$$\left.\begin{aligned} v &= B \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) \\ f_p &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Dabei ist K durch die Beziehung gegeben:

$$\frac{DkT}{4\pi} = \sum \frac{\bar{n}_p e_p^2}{K^2 - \frac{i\omega\varrho_p}{kT}}. \tag{38}$$

Durch Einsetzen der Lösungen in die Differentialgleichung (34) überzeugt man sich leicht von deren Richtigkeit. Die allgemeine Lösung unseres Problems führt dadurch, daß man die drei Lösungen (35), (36) und (37) zusammensetzt, zu dem Potential Φ:

$$\Phi = \frac{e_p}{D}\left|\frac{e^{-\varkappa r}}{r} + a e^{i\omega t}\frac{\partial}{\partial x}\bar{v} + A e^{i\omega t}\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-Kr}}{r} + B e^{i\omega t}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\right|. \tag{39}$$

Man entwickelt jetzt die Ausdrücke $\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-\varkappa r}}{r}$ und $\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-Kr}}{r}$ in eine Reihe:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-\varkappa r}}{r} = \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{\varkappa^2}{2} - \frac{\varkappa^3 r}{3} + \frac{\varkappa^4 r^2}{1\cdot 2\cdot 4} - \frac{\varkappa^5 r^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5} + \cdots\right)\cos\vartheta$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-Kr}}{r} = \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{K^2}{2} - \frac{K^3 r}{3} + \cdots\right)\cos\vartheta.$$

Nun darf die Entwicklung des Zusatzpotentials in der Nähe des Ions nicht unendlich werden, infolgedessen dürfen in (39) die Glieder, die proportional sind zu $\frac{1}{r^2}$, nicht vorkommen. Ferner darf die Ladungsdichte, welche von den Zusatzladungen herrührt, ebenfalls in der Nähe des Ions nicht unendlich werden. Es müssen demnach die Bedingungen erfüllt sein

$$a + A + B = 0$$
$$\varkappa^2 a + K^2 A = 0,$$

d. h.

$$A = -\frac{\varkappa^2}{K^2} a; \quad B = \left(\frac{\varkappa^2}{K^2} - 1\right)a. \tag{40}$$

Damit ist der definitive Ausdruck für das Potential[1]) Φ gefunden. Entwickelt nach Potenzen von r, ergibt sich

$$\Phi = \frac{e_p}{D}\left|\frac{e^{-\varkappa r}}{r} + \frac{\varkappa^2}{3}(K - \varkappa) a e^{i\omega t} r\cos\vartheta + \cdots\right| \tag{41}$$

1) Man kann zu der Lösung (41) für den Spezialfall des KCl auch in folgender Weise gelangen. Geht man in ganz ähnlicher Weise vor, wie Debye und Hückel in ihren Arbeiten, nur unter der Verallgemeinerung, daß die Geschwindigkeit des Ions geschrieben wird:

$$\bar{v} e^{i\omega t},$$

so führen diese Überlegungen zu der partiellen Differentialgleichung für v:

$$\Delta(\Delta v - K^2 v) = -\varkappa^2 \omega \frac{\partial \Phi_0}{\partial x}.$$

Mit Hilfe der Variation der Konstanten ergibt sich als spezielle Lösung dieser Differentialgleichung

$$-\frac{\partial \Phi_0}{\partial x}\frac{\omega}{\varkappa^2 - K^2} e^{i\omega t} = \frac{e}{D}\omega \frac{e^{-\varkappa r}\left(\frac{\varkappa}{r} + \frac{1}{r^2}\right)}{\varkappa^2 - K^2}\cos\vartheta\, e^{i\omega t}.$$

Die partikulären Integrale der homogenen Gleichung

$$\Delta(\Delta v - K^2 v) = 0$$

sind

$$\frac{d}{dr}\frac{e^{-Kr}}{r}\cos\vartheta; \quad \frac{d}{dr}\frac{e^{+Kr}}{r}\cos\vartheta; \quad r^2\cos\vartheta; \quad \frac{\cos\vartheta}{r^2}$$

Die zusätzliche Feldstärke, welche das Ion erfährt, ist also

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{e_p}{D}\frac{\varkappa^2}{3}(K-\varkappa)\,a\,e^{i\omega t}. \quad (42)$$

Führen wir in (42) die Geschwindigkeit $\dot{\xi}$ des Ions, wobei gilt:

$$\dot{\xi} = i\omega a e^{i\omega t}$$

ein, so können wir für die Kraft, die das schwingende Ion erfährt, auch schreiben:

$$-e_p\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{e_p^2}{3D}\frac{\varkappa^2\dot{\xi}}{i\omega}(K-\varkappa). \quad (42')$$

Man kann sich aus der Gleichung (38) für jeden Elektrolyten die Größe K ausrechnen und kennt damit die Kraft auf das schwingende Ion. Besonders einfach werden die Rechnungen, wenn wir wieder den schon oben behandelten Spezialfall der KCl-Lösung den weiteren Erörterungen zugrunde legen. Es gilt hierfür

$e_1 = -e_2 = e$, $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$, $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = n$, $\dot{\xi} = \bar{v}e^{i\omega t}$.

Für diesen Spezialfall wird die Größe K^2:

$$K^2 = \varkappa^2\left(1 + i\frac{\omega}{kT}\frac{\varrho}{\varkappa^2}\right) = \varkappa^2(1 + i\omega\Theta). \quad (43)$$

Wir setzen für dieses Beispiel:

$$\varkappa + K = \varkappa + \varkappa\sqrt{1 + i\omega\Theta} = \varkappa(a + ib). \quad (44)$$

Nach (13) resultiert für die Kraftwirkung auf das Ion die komplexe Form:

$$-\frac{\varkappa e^2}{3D}\frac{\varrho\bar{v}e^{i\omega t}}{kT(a+ib)} = -\frac{\varkappa e^2}{3D}\frac{\varrho\bar{v}(a-ib)e^{i\omega t}}{kT(a^2+b^2)}. \quad (45)$$

Wir setzen diese Kraft gleich:

$$-K^*e^{i(\omega t+\Delta)} = K^*e^{i(\omega t+\vartheta+\Delta)}. \quad (46)$$

Folglich gilt:

$$K^* = \frac{\varkappa e^2}{3DkT}\frac{\varrho\bar{v}}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (47)$$

$$\operatorname{tg}\Delta = -\frac{b}{a}. \quad (48)$$

Setzt man

$$a + ib = 1 + \alpha\cos\beta + i\alpha\sin\beta,$$

wobei

$$\beta = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\omega\Theta$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega\Theta}{\sin 2\beta}}$$

ist, so kann man K^* und Δ für jedes $\omega\Theta$ leicht berechnen.

Wie man aus der Formel (47) ersieht, besitzt die Kraft auf das schwingende Ion einen anderen absoluten Wert als den, welcher dem stationären Falle entspricht. Dieser Absolutwert der Kraft geht, wie ja ohne weiteres ersichtlich, für die Frequenz $\omega = 0$ in den von Debye und Hückel angegebenen (3) über. Für Frequenzen ω, die sehr klein sind gegenüber der Größe $\frac{1}{\Theta}$, weicht der Absolutwert dieser Kraft nur bis auf Größen zweiter Ordnung in ω von dem stationären ab. In diesem Falle ist folglich die absolute Größe dieser Kraft nur ganz wenig kleiner als die des mit konstanter Geschwindigkeit sich bewegenden Ions. Nähert sich die Frequenz dem Werte $\omega = \frac{1}{\Theta}$, so weicht der Absolutwert der Kraft schon etwas mehr von dem stationären ab, und für ganz große ω gegenüber $\frac{1}{\Theta}$ geht die Kraft umgekehrt proportional mit ω gegen 0. Wir haben in Fig. 2 das Verhältnis der absoluten Größe der Kraft auf das schwingende Ion zu der des stationär be-

Folglich lautet die allgemeine Lösung

$$\psi = \psi_0 + \left| \frac{e}{D}\frac{\bar{\omega}}{\varkappa^2 - K^2}\left[e^{-\varkappa r}\left(\frac{\varkappa}{r}+\frac{1}{r^2}\right) + A'\frac{d\frac{e^{-Kr}}{r}}{dr} + A''\frac{d\frac{e^{-Kr}}{r}}{dr} + \frac{B'}{r^2} + B''r^2\right]e^{i\omega t}\cos\vartheta \right.$$

Dabei ist, da das Potential für $r = \infty$ nicht unendlich werden darf $A'' = B'' = 0$. Die Endlichkeit des Zusatzpotentials und der Zusatzdichte in der Nähe des Ions ergibt für die Konstanten A' und B' die Werte

$$A' = \frac{e}{D}\frac{\bar{\omega}}{\varkappa^2 - K^2}\frac{\varkappa^2}{K^2};$$

$$B' = \frac{e\,\bar{\omega}}{D(K^2-\varkappa^2)} + \frac{e\,\omega\,\varkappa^2}{D(\varkappa^2-K^2)K^2}.$$

Vergleichen wir diese Konstanten mit den obigen (40), so muß gelten

$$A' = \frac{e}{D}\frac{\bar{\omega}}{\varkappa^2 - K^2}\frac{\varkappa^2}{K^2} = -\frac{\varkappa^2}{K^2}\frac{a\,e}{D};$$

d. h.

$$a = -\frac{\bar{\omega}}{\varkappa^2 - K^2}.$$

Daß diese Beziehung erfüllt ist, erkennt man sehr einfach auf folgende Weise. Es muß gelten, da

$$\dot{\xi} = a\,i\omega e^{i\omega t} \text{ und } \bar{\omega} = \frac{\varrho\bar{v}}{kT}$$

ist,

$$a = -\frac{\varrho}{kT}\frac{a\,i\omega}{\varkappa^2 - K^2};$$

oder

$$1 = -\frac{\varrho}{kT}\frac{i\omega}{\varkappa^2 - K^2}.$$

Hieraus folgt

$$K^2 = \varkappa^2 + \frac{i\omega\varrho}{kT}.$$

Diese Beziehung ist identisch mit der Beziehung (43), womit der Beweis der Richtigkeit unserer Behauptung erbracht worden ist.

wegten Ions als Funktion von $\omega\Theta$ aufgetragen. Dieses Verhältnis ist in der Fig. 2 mit δ bezeichnet worden.

Nachdem wir nunmehr wissen, wie der Absolutwert der Kraft als Funktion der Größe $\omega\Theta$ und damit der Frequenz ω verläuft, wenden

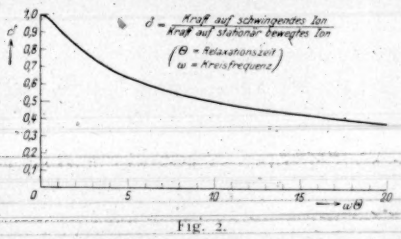


Fig. 2.

wir uns jetzt der Phasendifferenz $\pi + \Delta$ zu, mit welcher die Kraft auf das schwingende Ion gegenüber seiner Geschwindigkeit verläuft. Die Formeln (48) ergeben ja ohne weiteres die Phasendifferenz $\pi + \Delta$ der Kraft gegenüber der Geschwindigkeit und zwar ist die Phase Δ negativ. Für sehr kleine Werte von ω steigt die negative Phase Δ proportional zu ω an. Bei $\omega = \frac{1}{\Theta}$ beträgt sie etwa -12^0. Schließlich für den Fall ganz hoher Frequenzen gegenüber der Frequenz $\frac{1}{\Theta}$ nähert sie sich immer mehr und mehr dem Wert -45^0. In Fig. 3 ist der Verlauf der Phasendifferenz Δ als Funktion der Größe $\omega\Theta$ aufgetragen. $\Delta + \pi$ ist also die Phase zwischen Kraft und Geschwindigkeit des schwingenden

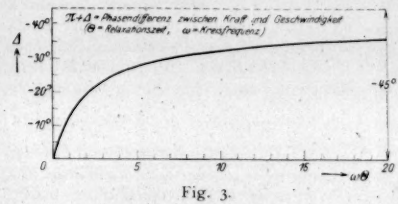


Fig. 3.

Ions. Dadurch, daß der Ausdruck der Kraft auf das schwingende Ion eine komplexe Form besitzt, wird, wie wir jetzt zeigen wollen, außer der Dispersion der Leitfähigkeit auch eine solche der Dielektrizitätskonstante des starken Elektrolyten bewirkt.

Zusammenfassend (vgl. auch Tabelle II) können wir bemerken, daß für sehr kleine ω die Kraft auf das schwingende Ion und die Stokessche Reibungskraft sich in Phase zueinander befinden, während hingegen für sehr große ω diese beiden Kräfte keineswegs mehr in Phase sind. Ferner nimmt der Absolutwert der Kraft auf das Ion mit wachsender Frequenz immer weiter und weiter ab und nähert sich schließlich für sehr hohe Frequenzen dem Werte 0. Dem letzten Umstand ist es zuzuschreiben, daß infolge der Abnahme der bremsenden Kraft auf das Ion, welche der Ionenatmosphäre ihr Bestehen verdankt, schließlich nur noch die Stokessche Kraft auf das Ion einwirkt: infolgedessen nähert sich die molekulare Leitfähigkeit des starken Elektrolyten mit wachsender Frequenz dem Werte, welcher der Leitfähigkeit bei unendlicher Verdünnung entspricht, wenn man, was wir in dieser Arbeit der Einfachheit halber tun wollen, von der kataphoretischen Wirkung absieht. Wir wollen jetzt die Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstante der Lösung als Funktion von ω rechnerisch ableiten.

III. Dispersion der Leitfähigkeit und der Dielektrizitätskonstante.

Wieder möge der Spezialfall eines einwertigen Elektrolyten vorliegen, in dem die Ionen gleiche Beweglichkeit besitzen. Es möge eine äußere Feldstärke $Ee^{i\omega t}$ auf den Elektrolyten einwirken. Die Frequenz des elektrischen Wechselfeldes[1]) sei ω. Wenn die Ionenkraft, die wir vorhin diskutiert hatten, nicht vorhanden wäre, müßten sich die elektrische Kraft und die Stokessche Reibungskraft $\varrho\bar{v}$ im Gleichgewicht halten. Man kann nun, was für das Folgende von Bedeutung ist, von dem Anlaufvorgang, während dessen die Ionen ihre konstante Endgeschwindigkeit erreicht haben, absehen. Wie man sich leicht überlegt, stellt sich ein Ion von der Masse m bereits nach einer Zeit von der Größenordnung $\frac{m}{\varrho} \sim 10^{-13}$ sec auf den konstanten Geschwindigkeitswert ein. Diese Zeiten sind nun ganz wesentlich kleiner als die, welche für unser Problem der Dispersion der Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstanten als Folge einer endlichen Relaxationszeit von Bedeutung sind. Wir können daher ruhig annehmen, daß die Ionen momentan dem elektrischen Felde folgen.

In unserem Falle müssen sich äußere elektrische Feldstärke, Stokessche Reibungskraft und die bremsende Ionenkraft das Gleichgewicht halten. Es besteht sonach die Gleichung

$$eEe^{i\omega t} - \varrho i\omega a e^{i\omega t} - \frac{e^2\varkappa^2}{3D}\varkappa \cdot a e^{i\omega t}(1 + i\omega\Theta - 1) = 0. \quad (49)$$

[1]) E bedeutet in III den Absolutwert der elektrischen Feldstärke, während es in I die Zentralladung des Ions angibt.

Hieraus rechnet sich die Geschwindigkeit $\dot{\xi}$ aus zu:

$$\dot{\xi} = i\omega a e^{i\omega t} = \frac{\frac{e}{\varrho} E e^{i\omega t}}{1 + \frac{e^2\varkappa^2}{3D}\frac{\varkappa}{\varrho}\Theta\left(\frac{|1+i\omega\Theta-1}{i\omega\Theta}\right)} \quad (50)$$

Da nun die Größe $\frac{e^2\varkappa^2}{3D}\frac{\varkappa}{\varrho}\Theta\left(\frac{|1+i\omega\Theta-1}{i\omega\Theta}\right)$ klein ist gegenüber der Einheit, können wir für die Geschwindigkeit auch schreiben

$$\dot{\xi} = \frac{e}{\varrho} E e^{i\omega t}\left|1 - \frac{e^2\varkappa}{3DkT}\left|\frac{1+i\omega\Theta-1}{i\omega\Theta}\right|\right. . \quad (51)$$

Mit der Geschwindigkeit ist aber die elektrische Stromdichte $\mathfrak{i}$ verknüpft mittels der Gleichung $\mathfrak{i} = 2ne\dot{\xi}$. Setzt man hierfür den Wert der Geschwindigkeit $\dot{\xi}$ aus (51) ein, so resultiert für die Stromdichte der Ausdruck

$$\mathfrak{i} = \frac{2ne^2}{\varrho} E e^{i\omega t}\left|1 - \frac{e^2\varkappa}{3DkT}\left|\frac{1+i\omega\Theta-1}{i\omega\Theta}\right|\right. . \quad (52)$$

Verschiebungsstrom und Leitungsstromdichte zusammengenommen müssen folglich gleich sein

$$J = \frac{i\omega D}{4\pi} E e^{i\omega t} + \frac{2ne^2}{\varrho} E e^{i\omega t}\left|1 - \frac{e^2\varkappa}{3DkT}\left|\frac{1+i\omega\Theta-1}{i\omega\Theta}\right|\right. . \quad (53)$$

Nun ist nach der phänomenologischen Maxwellschen Theorie die gesamte Stromdichte J gleich der Summe von Verschiebungs- und Leitungsstrom. Folglich besteht die Beziehung

$$J = \lambda\mathfrak{E} + \frac{D'}{4\pi}\dot{\mathfrak{E}} = \lambda E e^{i\omega t} + \frac{i\omega D'}{4\pi} E e^{i\omega t} . \quad (54)$$

Der reelle Teil der rechten Seite der Gleichung (54) liefert demzufolge die elektrische Leitfähigkeit; der imaginäre Teil der rechten Seite von (54) ist mit der Dielektrizitätskonstante der Lösung verknüpft. In Formeln geschrieben findet sich für die Leitfähigkeit λ bzw. den Zuwachs der Dielektrizitätskonstante D' der Lösung gegenüber der Dielektrizitätskonstante D des Lösungsmittels folgendes Gleichungssystem

$$\lambda = \frac{2ne^2}{\varrho} \cdot \text{Reeller Teil von} \left|1 - \frac{e^2\varkappa}{3DkT}\left|\frac{1+i\omega\Theta-1}{i\omega\Theta}\right|\right| \quad (55)$$

$$D' - D = \frac{4\pi}{\omega}\frac{2ne^2}{\varrho} \cdot \text{Imagin. Teil von} \left|1 - \frac{e^2\varkappa}{3DkT}\left|\frac{1+i\omega\Theta-1}{i\omega\Theta}\right|\right| \quad (56)$$

Um den reellen bzw. imaginären Teil zu bilden, kann man entweder die trigonometrischen Formeln auf S. 127 verwenden oder auch schreiben:

$$\left|\frac{1+i\omega\Theta-1}{i\omega\Theta}\right| = \left|\sqrt{\frac{(1+\omega^2\Theta^2)^{1/2}-1}{2\omega^2\Theta^2}} - i\left|\sqrt{\frac{(1+\omega^2\Theta^2)^{1/2}+1}{2\omega^2\Theta^2}} - \frac{1}{\omega\Theta}\right|\right| \quad (57)$$

Hieraus ergeben sich die Formeln für die Leitfähigkeit und den Dielektrizitätskonstantenüberschuß zu

$$\lambda = \frac{2ne^2}{\varrho}\left|1 - \frac{e^2\varkappa}{3DkT}\sqrt{\frac{(1+\omega^2\Theta^2)^{1/2}-1}{2\omega^2\Theta^2}}\right| \quad (58)$$

$$D' - D = 4\pi\frac{2ne^2}{\varrho}\frac{e^2\varkappa}{3DkT}\Theta\left|\sqrt{\frac{(1+\omega^2\Theta^2)^{1/2}+1}{2}} - 1\right| . \quad (59)$$

Zu jedem Werte von $\omega\Theta$ sind die Größen λ und $D'-D$ als Funktion von $\omega\Theta$ gefunden. Führt man den Wert der Leitfähigkeit bei unendlicher Verdünnung λ_∞ ein:

$$\lambda_\infty = \frac{2ne^2}{\varrho} \quad (60)$$

und setzt man

$$\frac{e^2\varkappa}{6DkT}\sqrt{\frac{(1+\omega^2\Theta^2)^{1/2}-1}{2\omega^2\Theta^2}} = \frac{e^2\varkappa}{6DkT}x_1(\omega\Theta), \quad (61)$$

so können wir die Formel für die Leitfähigkeit (58) auch schreiben

$$\frac{\lambda_\infty - \lambda_\omega}{\lambda_\infty} = \frac{e^2\varkappa}{6DkT}x_1(\omega\Theta). \quad (62)$$

Für sehr kleine $\omega\Theta$ strebt die Funktion x_1 gegen Eins. Führen wir für die Leitfähigkeit im stationären Falle die Bezeichnung λ_0 ein, so gilt

$$\frac{\lambda_\infty - \lambda_0}{\lambda_\infty} = \frac{e^2\varkappa}{6DkT}. \quad (63)$$

Bilden wir jetzt den Quotienten von (62) und (63), so resultiert die Beziehung

$$\frac{\lambda_\infty - \lambda_\omega}{\lambda_\infty - \lambda_0} = x_1(\omega\Theta). \quad (64)$$

Eine ähnliche Überlegung wollen wir jetzt für den Dielektrizitätskonstantenüberschuß durchführen. Die Formel (59) läßt sich in der Form schreiben

$$D'_\omega - D = 4\pi\frac{2ne^2}{\varrho}\frac{e^2\varkappa}{3DkT}\Theta x_2(\omega\Theta). \quad (63')$$

Dabei ist die Abkürzung eingeführt

$$x_2(\omega\Theta) = \left| \frac{\sqrt{(1+\omega^2\Theta^2)^{3/2}+1}}{2} - 1 \right| \Big/ \omega^2\Theta^2 . \quad (65)$$

Für kleine Werte von $\omega\Theta$ strebt x_2 gegen 1/8, vgl. Tabelle (II). Folglich wird, wenn wir den Dielektrizitätskonstantenüberschuß bei der Frequenz o mit $D'_0 - D$ bezeichnen:

$$D'_0 - D = 4\pi \frac{2ne^2}{\varrho} \frac{e^2\varkappa}{3DkT} \Theta \frac{1}{8} . \quad (66)$$

Zusammenfassend bemerken wir, daß mit den Abkürzungen (64) und (65) die Formeln für den Leitfähigkeitsdefekt und den Dielektrizitätskonstantenüberschuß auf die Form gebracht werden können:

$$\lambda_\infty - \lambda_\omega = \lambda_\infty \frac{e^2\varkappa}{6DkT} x_1(\omega\Theta)$$

$$D'_\omega - D = 4\pi \frac{2ne^2}{\varrho} \frac{e^2\varkappa}{3DkT} \Theta x_2(\omega\Theta) .$$

Für die zahlenmäßige Berechnung des Leitfähigkeitsdefektes bzw. des Dielektrizitätskonstantenüberschusses ist es angebracht, an diese Formeln (62) und (63') anzuknüpfen. Für die graphische Darstellung hingegen ist es zweckmäßiger, die Größen $\frac{\lambda_\infty - \lambda_\omega}{\lambda_\infty - \lambda_0}$ bzw. $\frac{D'_\omega - D}{D'_0 - D}$ als Funktion von $\omega\Theta$ zu bilden. Wir haben in Fig. 4 und 5

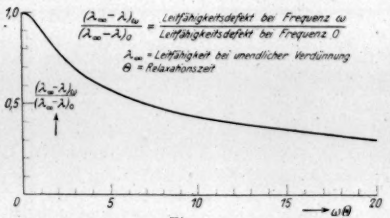


Fig. 4.

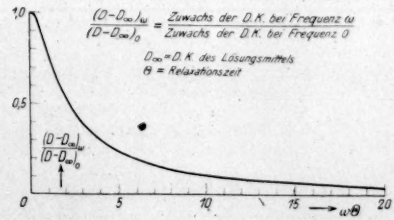


Fig. 5.

diese Größen, die also mit der Bezeichnung $x_1(\omega\Theta)$ bzw. $8\,x_2(\omega\Theta)$ in Übereinstimmung sind, in Abhängigkeit von $\omega\Theta$ aufgetragen. Die Fig. 4 enthält den Quotienten aus Leitfähigkeitsdefekt bei Frequenz ω und Leitfähigkeitsdefekt bei Frequenz o als Funktion von $\omega\Theta$. Man sieht deutlich aus der Fig. 4, daß eine Dispersion der Leitfähigkeit des starken Elektrolyten vorliegt. Für sehr hohe Frequenzen ω gegenüber $1/\Theta$ nähert sich die Leitfähigkeit λ dem Werte, der der unendlichen Verdünnung entspricht[1]). Für sehr kleine Werte von ω gegenüber $\frac{1}{\Theta}$ weicht der Ausdruck $\frac{\lambda_\infty - \lambda_\omega}{\lambda_\infty - \lambda_0}$ nur wieder in zweiter Ordnung in $\omega\Theta$ von 1 ab. Daher hat die Kurve $x_1(\omega\Theta)$ für sehr kleine Werte von $\omega\Theta$ parabolische Gestalt und besitzt für $\omega = 0$ eine horizontale Tangente. In Fig. 5 ist der Quotient des Zuwachses der Dielektrizitätskonstanten der Lösung bei der Frequenz ω und des Zuwachses der Dielektrizitätskonstanten bei der Frequenz o als Funktion von $\omega\Theta$ graphisch dargestellt.

Für sehr kleine Werte von ω hat die Kurve wieder die Gestalt einer Parabel mit horizontaler Tangente bei $\omega = 0$, während für große Werte von ω die Dielektrizitätskonstante der Lösung gleich der Dielektrizitätskonstante des Lösungsmittels wird. Beobachtet man demnach in einem Elektrolyten eine Vergrößerung der Dielektrizitätskonstanten über den Normalwert des Lösungsmittels, so ist dieses noch kein Beweis dafür, daß undissoziierte Moleküle infolge Dipolwirkung jenes Verhalten verursachen. Unser Resultat bedeutet, daß dieselbe Wirkung auch in einer völlig dissoziierten Lösung infolge Rückwirkung der Ionenwolke auftreten kann.

In der folgenden Tabelle II haben wir noch einmal den Absolutwert der Kraft auf das schwingende Ion, die Phase, die Größe $\frac{\lambda_\infty - \lambda_\omega}{\lambda_\infty - \lambda}$ und $\frac{D'_\omega - D}{D'_0 - D}$ als Funktion von $\omega\Theta$ angegeben. Dabei sind zur Berechnung, zur Kontrolle sowohl die trigonometrischen Formeln auf S. 127 als auch die analytischen Formeln (57) benützt worden. Die Genauigkeit der Zahlen ist größer als 1 Proz.

Zum Schlusse einige Zahlenangaben für das Beispiel des *KCl*.

Da die molekulare Leitfähigkeit des *KCl* den Wert $65 + 65 = 130$ besitzt, besteht die Beziehung

$$\frac{\gamma}{1000} 135\, E\, 3 \times 10^9 = \frac{2ne^2 E}{\varrho \cdot 300} = \frac{2\gamma N e^2}{1000 \cdot \varrho} \frac{E}{300} .$$

1) Dieses Resultat bedarf infolge der kataphoretischen Wirkung die schon mehrfach hervorgehobene Korrektion.

Tabelle II.

$\omega\Theta$	δ	Δ	$x_1 = \frac{\lambda_\infty - \lambda_\omega}{\lambda_\infty - \lambda_0}$	$x_2(\omega\Theta)$	$\frac{D'_\omega - D}{D'_0 - D} = 8x_2$
0	1,00	0°	1,00	0,125	1,000
0,1	0,999	— 1° 26′	0,999	0,125	0,999
0,2	0,998	— 2° 50′	0,996	0,124	0,996
0,5	0,980	— 6° 50′	0,972	0,116	0,928
1,0	0,930	— 12° 15′	0,910	0,098	0,784
2,0	0,832	— 19° 05′	0,786	0,068	0,544
3,0	0,755	— 23° 02′	0,694	0,0493	0,3944
4,0	0,690	— 25° 44′	0,624	0,0375	0,3000
5,0	0,645	— 27° 31′	0,572	0,0298	0,2384
6,0	0,608	— 28° 54′	0,532	0,0245	0,1960
7,0	0,573	— 30° 07′	0,498	0,0206	0,1648
8,0	0,547	— 30° 55′	0,470	0,0176	0,1408
9,0	0,524	— 31° 40′	0,446	0,0153	0,1224
10,0	0,507	— 32° 19′	0,426	0,0135	0,1080
12,0	0,469	— 33° 30′	0,392	0,0108	0,0864
15,0	0,431	— 34° 41′	0,354	0,00813	0,0650
18,0	0,398	— 35° 25′	0,324	0,00644	0,0515
20,0	0,380	— 35° 57′	0,308	0,00506	0,0405
∞	0	— 45°	0	0	0

Hierin ist die elektrische Feldstärke in Volt pro Zentimeter angegeben. Da N als Loschmidtsche Zahl pro Mol den Wert hat

$$N = 6{,}06 \cdot 10^{23},$$

folgt für die Beweglichkeit des KCl-Ions

$$\varrho = 0{,}236 \cdot 10^{-8} \text{ dyn sec cm}^{-1}.$$

Hieraus berechnen sich die Ausdrücke

$$\lambda_\infty, \frac{\lambda_\infty - \lambda_0}{\lambda_\infty}, D'_0 - D$$

zu

$$\lambda_\infty = 1{,}171 \cdot 10^{11} \cdot \gamma$$

$$\frac{\lambda_\infty - \lambda_0}{\lambda_\infty} = 0{,}386 \cdot \sqrt{\gamma}$$

$$D'_0 - D = 2{,}42 \cdot \pi \sqrt{\gamma}.$$

Diese Angaben beziehen sich auf die Frequenz $\omega = 0$. Die Ausdrücke für die Frequenz ω ergeben sich leicht nach (62) und (63′). Dabei ist für Θ gemäß (22) zu setzen:

$$\Theta = \frac{0{,}553 \cdot 10^{-10}}{\gamma}.$$

Ferner beziehen sich diese Ausdrücke auf $T = 291{,}2$, wo $D = 81{,}3$ ist.

Wählen wir etwa als Konzentration $\gamma = \frac{1}{1000}$, so beträgt der Zuwachs der Dielektrizitätskonstante für diese Konzentration und die Frequenz 0, für die er ja den größten Wert annimmt, 0,24. Rechnet man sich die Wellenlänge aus, bei welcher dieser Zuwachs auf die Hälfte gesunken ist, so gilt hierfür

$$\lambda_{im} = \frac{4{,}74 \cdot 10^{-2}}{\gamma}$$

wobei λ in Meter zu messen ist.

Nimmt man wieder als Konzentration $\gamma = \frac{1}{1000}$, so folgt als Wellenlänge der Wert

$$\lambda_{im} = 47{,}4 \cdot m.$$

Der Leitfähigkeitsdefekt dagegen ist zur Hälfte aufgehoben bei einer Wellenlänge

$$\lambda'_{im} = \frac{1{,}49 \cdot 10^{-2}}{\gamma} \text{ d. h. für } \gamma = \frac{1}{1000}$$

bei $\lambda'_{im} = 14{,}9$ m.

Wir möchten zum Schluß noch folgendes bemerken. Es gibt eine große Reihe von Messungen über den Verlauf der Dielektrizitätskonstante von starken Elektrolyten als Funktion der Konzentration. Es ist bisher nicht möglich gewesen, diese Messungen miteinander in Einklang zu bringen[1]). Manche Autoren finden eine Änderung, andere keine. Aus den Messungen von Walden und von Sack, die auch theoretisch verständlich sind, folgt eine Abnahme der Dielektrizitätskonstante proportional der Konzentration. Nehmen wir als Frequenz 0, so finden wir einen Dielektrizitätskonstantenzuwachs, welcher proportional ist mit $\sqrt{\gamma}$. Man überlegt sich leicht, daß unser Effekt keineswegs mit diesen Messungen im Widerspruch zu stehen braucht. Die Ursache der Abnahme der Dielektrizitätskonstante nach Sack ist eine gänzlich verschiedene von der, die wir in dieser Arbeit zugrunde legten. In Wirklichkeit werden beide Effekte überlagert und man erkennt sofort, daß dann bei außerordentlich geringen, der Messung un-

1) Vergleiche die demnächst erscheinende Monographie: P. Debye, Polar Molecules, Chem. Catalogue Co., New York. Deutsch bei S. Hirzel in Leipzig.

zugänglichen Konzentrationen, die Dielektrizitätskonstante einen Maximalwert besitzt; sie nimmt bei ebenfalls kaum der Messung zugänglichen Konzentrationen den Wert der Dielektrizitätskonstante des Lösungsmittels an und schließlich mit wachsender Konzentration ab. Erst dieser letzte Bereich ist der Messung wieder zugänglich.

Zum Schlusse sei hervorgehoben, daß diese Notiz im wesentlichen nur eine charakterisierende Beschreibung der zu erwartenden Erscheinung enthält, deren quantitative Erfassung aus den mehrfach im Text erwähnten Gründen noch nicht vollständig ist. Die notwendigen Ergänzungen werden in einer demnächst folgenden Notiz enthalten sein.

Der eine von uns möchte an dieser Stelle dem International Education Board für die Ermöglichung seines Aufenthalts in Leipzig seinen herzlichsten Dank aussprechen.

(Eingegangen 30. Januar 1928.)

Das asymmetrische Zweizentrenproblem nach der Wellenmechanik und ihre Anwendung auf die Kristalltheorie (Streuvermögen der Atome).

Von K. F. Niessen.

Das Streuvermögen der Atome in Kristallgittern vom Diamant- und Wurzittyp wird als Zweizentrenproblem berechnet, dessen Wellenmechanik zuerst näher entwickelt wird.

Zusammenfassung.

Die Kristallgitter vom Diamant- oder Wurzittyp können aufgebaut gedacht werden mittels Zweizentrenproblemen. Letztere sind symmetrisch beim Diamanttyp und asymmetrisch beim Wurzittyp. Deshalb beginnen wir in § 1 mit der Wellenmechanik des asymmetrischen Zweizentrenproblems.

Ein Differentialverfahren wird angegeben, das uns gestattet, das Verhältnis zwischen der Elektronenladung auf der einen und der auf der anderen Seite (getrennt durch die Mittelebene, senkrecht auf der Verbindungslinie der Zentren) bei beliebiger nicht zu großer Asymmetrie in den positiven Ladungen der Zentren sofort auf Größen zurückzuführen, die einem symmetrischen Problem entnommen sind.

In § 2 wird für die Anwendung auf den Kristallbau der Sonderfall betrachtet, daß die Gesamtladung der Zentren $+e$ ist.

Das Verhältnis der Elektronenladungen links und rechts läßt sich im beliebigen asymmetrischen Fall näherungsweise durch Funktionen ausdrücken, die O. Burrau in seiner Theorie des H_2^+ Ions schon numerisch berechnet hat.

Es wird gezeigt, wie in den genannten Kristallgittern solche neutralen Zweizentrenprobleme in Wechselwirkung stehen, und wie daraus die Ladung der Elektronen„wolke" zu berechnen ist, die von den Bindungselektronen herrührt und jeden Atomrest einhüllt. Dabei wird angenommen, daß die Atome alle ihre äußeren Elektronen für die Bindung abgeben, so daß als „Atomreste" die (zwar kontrahierten) Edelgaskonfigurationen auftreten, die den Atomen im periodischen System vorausgehen. Als Streuvermögen der Atome benutzten wir die Elektronenzahl im Atomrest, vermehrt um die in $-e$ ausgedrückte Ladung der sie umhüllenden Elektronenwolke. Wir bekommen so das Streuvermögen als Funktion des Atomabstandes und der Zahlen p_1 und p_2, die die Spalten des periodischen Systems angeben, wo die neutralen Atome stehen.

Die berechneten Werte sind in guter Übereinstimmung mit dem Experiment.

§ 1. Sind r_1 und r_2 die Abstände vom Elektron zum linken, bzw. rechten Zentrum (deren Ladungen $k_1 e$ und $k_2 e$ sein mögen), so lautet die Schrödingersche Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E+\frac{k_1 e^2}{r_1}+\frac{k_2 e^2}{r_2}\right)\psi=0$$

worin E die Energiekonstante darstellt.

Befinden sich die Zentren in den Punkten:

$$x=-c\,,\quad y=0\,,\quad z=0$$
$$x=+c\,,\quad y=0\,,\quad z=0$$

und führt man elliptische Koordinaten ein:

$$\lambda=\frac{r_1+r_2}{2c}\qquad \mu=\frac{r_1-r_2}{2c}$$

sowie als dritte Koordinate den Winkel φ zwischen einer festen und einer beweglichen Ebene, beide durch die x-Achse gehend, und bedient man sich noch, wie Burrau[1]), der dimensionslosen Größen:

$$\varepsilon=\frac{2c}{a_H}\qquad \left(\begin{matrix}a_H=\text{erster Bohrscher}\\ \text{Kreis im } H\text{-Atom}\end{matrix}\right)$$
$$\gamma=\frac{E\varepsilon^2}{4E_H}\qquad \left(\begin{matrix}E_H=\text{Energiewert im}\\ \text{unangeregten } H\text{-Atom}\end{matrix}\right)$$

so läßt sich die nullte Eigenfunktion schreiben als:

$$\psi=C\,\psi_\lambda(\lambda)\,\psi_\mu(\mu), \tag{1}$$

worin ψ_λ und ψ_μ nachstehenden Gleichungen genügen[2])

$$(\lambda^2-1)\frac{d^2\psi_\lambda}{d\lambda^2}+2\lambda\frac{d\psi_\lambda}{d\lambda}+[A+(k_1+k_2)\varepsilon\lambda-\gamma\lambda^2]\psi_\lambda=0 \tag{2}$$

1) O. Burrau, Det. Kgl. Danske Videnskabernas Selskab. 7, 14, 1927.

2) O. Burrau, l. c. für den Fall $k_1=k_2=1$.

$$(1-\mu^2)\frac{d^2\psi_\mu}{d\mu^2} - 2\mu\frac{d\psi_\mu}{d\mu} + [-A + (k_2-k_1)\varepsilon\mu + \gamma\mu^2]\psi_\mu = 0, \quad (3)$$

A ist hierin eine Separationskonstante.

Setzt man:

$$\psi_\lambda = \frac{v_\lambda}{\sqrt{\lambda^2-1}}, \qquad \psi_\mu = \frac{v_\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}, \quad (4)$$

so bekommt man aus (2) und (3) für v_λ und v_μ [1]):

$$\frac{d^2 v_\lambda}{d\lambda^2} + K_\lambda v_\lambda = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d^2 v_\mu}{d\mu^2} + K_\mu v_\mu = 0 \quad (6)$$

mit den Abkürzungen:

$$K_\lambda = \frac{1 + [A + 2\varkappa\varepsilon\lambda - \gamma\lambda^2](\lambda^2-1)}{(\lambda^2-1)^2} \quad (7)$$

$$K_\mu = \frac{1 + [-A + 2\rho\varepsilon\mu + \gamma\mu^2](1-\mu^2)}{(1-\mu^2)^2}, \quad (8)$$

wo

$$2\varkappa = k_1 + k_2 \quad (9)$$

$$2\rho = k_2 - k_1 \quad (10)$$

Wir nehmen $k_2 > k_1$ also $\rho > 0$ an.

Da der Bereich von λ, μ angegeben wird durch:

$$1 \leq \lambda \leq \infty$$
$$-1 \leq \mu \leq +1$$

müssen wir, damit ψ überall endlich bleibt, fordern:

$$v_\mu(-1) = 0 \qquad v_\mu(+1) = 0$$
$$v_\lambda(+1) = 0 \qquad v_\lambda(+\infty) = 0.$$

Die letzte Bedingung folgt allerdings nicht notwendig aus der Endlichkeit von ψ für $\lambda = \infty$.

Betrachtet man aber die Differentialgleichung (5), so sieht man sofort, daß für $\lambda = \infty$ v_λ sich verhält:

$$\text{entweder wie } v_\lambda = e^{-\sqrt{\gamma}\lambda}. \quad (11)$$
$$\text{oder wie } v_\lambda = e^{+\sqrt{\gamma}\lambda} \quad (11a)$$

Im letzteren Falle würde ψ_λ und damit ψ gewiß unendlich für $\lambda = \infty$; deshalb können wir nur (11) benutzen, was also auf die Forderung $v_\lambda(+\infty) = 0$ hinausläuft.

Wir brauchen von den Differentialgleichungen (5) und (6) also nur Eigenfunktionen, und zwar die nullten, weil wir den Grundzustand untersuchen wollen. Bei gegebenem Abstand der Zentren, d. h. bei gegebenem ε, sind A und γ durch die Grenzbedingungen festgelegt. Burrau bestimmte diese A und γ als Funktionen von ε im Falle $k_1 = k_2 = 1$, jedoch mittels ganz anderer Gleichungen mit anderen Grenzbedingungen. Wenn man aber mit unseren Funktionen v_μ und v_λ die Funktionen ψ_λ und ψ_μ für den Fall $k_1 = k_2 = 1$ bestimmt, so ergibt sich, daß diese dann den Burrauschen Grenzbedingungen genügen. Man beweist nämlich leicht aus (5) und (6), daß in der Umgebung von

$\lambda = 1$, v_λ sich verhält wie $\sqrt{\lambda - 1}$ und

in der Umgebung von

$\lambda = \infty$, v_λ sich verhält wie $e^{-\sqrt{\gamma}\lambda}$, daß

andrerseits in der Umgebung von

$$\mu = \mp 1, v_\mu \text{ sich verhält wie } \sqrt{1 \pm \mu} \quad (12)$$

und deshalb zu Funktionen:

$$\sigma_\mu = -\frac{d\psi_\mu}{d\mu} : \psi_\mu$$

$$\sigma_\lambda = -\frac{d\psi_\lambda}{d\lambda} : \psi_\lambda$$

führen, die den von Burrau aufgestellten Grenzbedingungen genügen.

Im Falle $k_1 \neq 1$ oder $k_2 \neq 1$ brauchen wir aber für A und γ andere Funktionen von ε. Wir könnten diese bezeichnen mit

$$\underset{k_1 k_2}{A}(\varepsilon) \text{ und } \underset{k_1 k_2}{\gamma}(\varepsilon).$$

Zum Zwecke späterer Betrachtungen empfiehlt es sich mehr die in (9) (10) eingeführten Indizes $\varkappa$ und ρ zu benützen, und die Funktionen deshalb anzudeuten mit:

$$\underset{\varkappa\rho}{A}(\varepsilon) \text{ und } \underset{\varkappa\rho}{\gamma}(\varepsilon).$$

Diese Größen sind von großer Wichtigkeit für unser Problem. Kennt man sie bei gegebenem ε, so wird es möglich sein die (nun wirklich bestehenden) Eigenfunktionen v_μ und v_λ zu konstruieren (auf welchem Wege werden wir später sehen), also auch nach (1) (4) die Ladungsdichte als Funktion der Raumkoordinaten anzugeben, und so das Verhältnis der Gesamtladung links und rechts zu bestimmen.

Wir werden zuerst die Größen $\underset{\varkappa 0}{A}(\varepsilon)$ und $\underset{\varkappa 0}{\gamma}(\varepsilon)$ auffinden, die also einem symmetrischen Problem mit $\rho = 0$ entsprechen. Sie treten auf in:

$$\frac{d^2}{d\mu^2}(v_\mu)_{\varkappa 0} + \frac{1 + [-\underset{\varkappa 0}{A} + \underset{\varkappa 0}{\gamma}\mu^2](1-\mu^2)}{(1-\mu^2)^2}(v_\mu)_{\varkappa 0} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{d^2}{d\lambda^2}(v_\lambda)_{\varkappa 0} + \frac{1 + [\underset{\varkappa 0}{A} + 2\varkappa\varepsilon\lambda - \underset{\varkappa 0}{\gamma}\lambda^2](\lambda^2-1)}{(\lambda^2-1)^2}(v_\lambda)_{\varkappa 0} = 0, \quad (14)$$

welche Differentialgleichungen im Besitz nullter Eigenfunktionen sind.

Wenn Burrau bei seiner Rechnung für das H_2^+ Ion auch unseren Weg eingeschlagen, also Funktionen v_μ und v_λ eingeführt hätte, so

1) K. F. Niessen, Physik. Zeitschr. **29**, 52, 1928.

wäre er auf die Differentialgleichung gestoßen:

$$\frac{d^2 v_\mu}{d\mu^2} + \frac{1 + [-A + \gamma\mu^2](1-\mu^2)}{(1-\mu^2)^2} v_\mu = 0 \quad (15)$$

$$\frac{d^2 v_\lambda}{d\lambda^2} + \frac{1 + [A + 2\varepsilon\lambda - \gamma\lambda^2](\lambda^2-1)}{(\lambda^2-1)^2} v_\lambda = 0 \quad (16)$$

wo die Funktionen A und γ dieselben sind, wie er sie in seinen σ-Gleichungen findet und die er numerisch berechnet hat, und zwar A als Funktion von γ und ε als Funktion von γ. Es ist aber leicht daraus graphisch A und γ als Funktionen von ε zu erhalten. Wiewohl diese in unserer Bezeichnungsweise $\underset{1\,0}{A}(\varepsilon)$ und $\underset{1\,0}{\gamma}(\varepsilon)$ heißen sollten, folgen wir hier (und nur hier, d. h. im Falle $k_1 = k_2 = 1$) der Bezeichnungsweise von Burrau und nennen sie einfach $A(\varepsilon)$ und $\gamma(\varepsilon)$. Sie sind aus seinen Tabellen nach obigem als bekannt anzusehen.

Nach Definition von $A(\varepsilon)$ und $\gamma(\varepsilon)$ besitzen die Differentialgleichungen (15) und (16) auch Eigenfunktionen, wenn man z. B. nimmt:

$$\varepsilon = \varkappa\varepsilon'$$
$$A = A(\varkappa\varepsilon')$$
$$\gamma = \gamma(\varkappa\varepsilon').$$

Das läßt sich in bezug auf die Differentialgleichungen (13) und (14) auch so lesen: Letztere haben Eigenfunktionen, wenn man in ihnen nimmt:

$$\underset{\varkappa 0}{A}(\varepsilon) = A(\varkappa\varepsilon')$$
$$\underset{\varkappa 0}{\gamma}(\varepsilon) = \gamma(\varkappa\varepsilon')$$
$$\varepsilon = \varepsilon'.$$

Der Grund dafür ist, daß in (13) (14) das Produkt $\varkappa\varepsilon$ auftritt überall dort, wo in (15) (16) ε steht.

Man kann die Funktionen $\underset{\varkappa 0}{A}(\varepsilon)$ und $\underset{\varkappa 0}{\gamma}(\varepsilon)$ also einfach aus den bekannten Kurven $\underset{1\,0}{A}(\varepsilon)$ und $\underset{1\,0}{\gamma}(\varepsilon)$ ableiten, indem man alle Abszissen mit $\varkappa$ dividiert und die Ordinate ungeändert läßt.

Ist $p \ll \varkappa$, dann ist:

$$\underset{\varkappa p}{A}(\varepsilon) = \underset{\varkappa 0}{A}(\varepsilon) + \left(\frac{d\,\underset{\varkappa p}{A}}{dp}\right)_0 dp$$

$$\underset{\varkappa p}{\gamma}(\varepsilon) = \underset{\varkappa 0}{\gamma}(\varepsilon) + \left(\frac{d\,\underset{\varkappa p}{\gamma}}{dp}\right)_0 dp$$

Die Differentialquotienten lassen sich (selbst bei beliebigem $\varkappa$ und p) folgendermaßen aus den Differentialgleichungen (5) und (6) bestimmen.

Setzt man in diesen

$$\varepsilon = \varepsilon,\ A = \underset{\varkappa p}{A}(\varepsilon),\ \gamma = \underset{\varkappa p}{\gamma}(\varepsilon),$$

so besitzen sie nach Definition von A und p nullte Eigenfunktionen.

Das ist auch der Fall, wenn man setzt:

$$\varepsilon = \varepsilon$$
$$A = \underset{\varkappa p}{A}(\varepsilon) + \frac{d\,\underset{\varkappa p}{A}}{dp} dp$$
$$\gamma = \underset{\varkappa p}{\gamma}(\varepsilon) + \frac{d\,\underset{\varkappa p}{\gamma}}{dp} dp.$$

Die Differentialgleichungen sehen im letzten Falle so aus:

$$\frac{d^2 v_\lambda}{d\lambda^2} + \left(K_\lambda + \frac{dK_\lambda}{dp} dp\right) v_\lambda = 0 \quad (17)$$

$$\frac{d^2 v_\mu}{d\mu^2} + \left(K_\mu + \frac{dK_\mu}{dp} dp\right) v_\mu = 0. \quad (18)$$

haben also die Form:

$$\frac{d^2 v_\lambda}{d\lambda^2} + (K_\lambda + L_\lambda\delta)\, v_\lambda = 0 \quad (19)$$

$$\frac{d^2 v_\mu}{d\mu^2} + (K_\mu + L_\mu\delta)\, v_\mu = 0 \quad (20)$$

worin δ ein kleiner Parameter ist.

Ist nun ν_μ die Eigenfunktion von (6) und $v_\mu + \eta_\mu\delta$ die nämliche von (20), so findet man bei Vernachlässigung von Termen mit δ^2 und Anwendung von (6) sofort für η_μ die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\eta_\mu}{d\mu^2} + K_\mu\eta_\mu = -L_\mu v_\mu$$

mit den Grenzbedingungen:

$$\eta_\mu(-1) = 0,\quad \eta_\mu(+1) = 0. \quad (21)$$

Wird diese Gleichung mit v_μ und Gleichung (6) mit η_μ multipliziert, so ergibt sich nach Subtraktion

$$v_\mu\frac{d^2\eta_\mu}{d\mu^2} - \eta_\mu\frac{d^2 v_\mu}{d\mu^2} = -L_\mu v_\mu^2$$

und daraus nach Integration von $\mu = -1$ bis $\mu = +1$:

$$\int_{-1}^{+1} L_\mu v_\mu^2\, d\mu = \left|\eta_\mu\frac{dv_\mu}{d\mu} - v_\mu\frac{d\eta_\mu}{d\mu}\right|_{-1}^{+1} = 0.$$

Wählt man umgekehrt L_μ so, daß obige Gleichung befriedigt ist, so besitzt die Differentialgleichung (20) eine nullte Eigenfunktion, sobald die Differentialgleichung (6) eine solche hat. Besitzt analog die Differentialgleichung (5) eine nullte Eigenfunktion und wählt man in (19) die „Störungsfunktion" L_λ so, daß

$$\int_1^\infty L_\lambda v_\lambda^2\, d\lambda = 0$$

ist, so hat die letztere Differentialgleichung auch wieder eine nullte Eigenfunktion.

Zur Bestimmung von $\frac{dA}{dp}$ und $\frac{d\gamma}{dp}$ (die Indizes $\varkappa$ und p lassen wir der Einfachheit halber vorläufig fort), haben wir also:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dK_\mu}{dp} v_\mu^2 \, d\mu = 0,$$

$$\int_{+1}^{\infty} \frac{dK_\lambda}{dp} v_\lambda^2 \, d\lambda = 0$$

oder ausgeschrieben:

$$\frac{\partial A}{\partial p}\int_{-1}^{+1} \frac{v_\mu^2}{1-\mu^2} d\mu + 2\varepsilon \int_{-1}^{+1} \frac{\mu}{1-\mu^2} v_\mu^2 \, d\mu + \frac{\partial \gamma}{\partial p}\int_{-1}^{+1} \frac{\mu^2}{1-\mu^2} v_\mu^2 \, d\mu = 0$$

$$+\frac{\partial A}{\partial p}\int_{1}^{\infty} \frac{v_\lambda^2}{\lambda^2-1} d\lambda = \frac{\partial \gamma}{\partial p}\int_{1}^{\infty} \frac{\lambda^2}{\lambda^2-1} v_\lambda^2 \, d\lambda = 0,$$

also:

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{A}{\varkappa}_p\right) = \frac{\varepsilon}{N}\int_1^\infty \frac{\lambda^2 v_\lambda^2}{\lambda^2-1} d\lambda \int_{-1}^{+1} \frac{\mu v_\mu^2}{1-\mu^2} d\mu \quad (22)$$

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{\gamma}{\varkappa}_p\right) = \frac{\varepsilon}{N}\int_1^\infty \frac{v_\lambda^2}{\lambda^2-1} d\lambda \int_{-1}^{+1} \frac{\mu v_\mu^2}{1-\mu^2} d\mu \quad (23)$$

mit:

$$N = \int_1^\infty \frac{v_\lambda^2}{\lambda^2-1} d\lambda \int_{-1}^{+1} v_\mu^2 \, d\mu + \int_1^\infty v_\lambda^2 \, d\lambda \int_{-1}^{+1} \frac{v_\mu^2}{1-\mu^2} d\mu.$$

Hierin sind v_μ und v_λ eigentlich mit Indizes $\varkappa$ und p zu versehen.

Für das Verhältnis zwischen der gesamten negativen Elektrizität H_1 auf der linken Hälfte (wo $-1 \leqq \mu \leqq 0$) und der auf der rechten Hälfte (H_2), (wo $0 \leqq \mu \leqq +1$) haben wir:

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{\int_{-1}^{0}\int_{1}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} \psi^2 (\lambda^2-\mu^2)\, d\mu\, d\lambda\, d\varphi}{\int_{0}^{1}\int_{1}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} \psi^2 (\lambda^2-\mu^2)\, d\mu\, d\lambda\, d\varphi}$$

weil das Raumelement $d\Omega$:

$$d\Omega = c^3 (\lambda^2-\mu^2)\, d\lambda\, d\mu\, d\varphi$$

ist, und der Normierungsfaktor von ψ offenbar herausfällt.

Nach (1), (4) haben wir:

$$\left(\frac{H_1}{H_2}\right)_p = \frac{\int_{-1}^{0}\int_{1}^{\infty} \frac{\lambda^2-\mu^2}{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)} \underset{\varkappa}{\underset{p}{(v_\lambda^2 v_\mu^2)}} d\mu\, d\lambda}{\int_{0}^{1}\int_{1}^{\infty} \frac{\lambda^2-\mu^2}{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)} \underset{\varkappa}{\underset{p}{(v_\lambda^2 v_\mu^2)}} d\mu\, d\lambda} = \frac{J + J_1 p}{J' + J_1' p} \quad (24)$$

wobei:

$$J = \int_{-1}^{0}\int_{1}^{\infty} \frac{\lambda^2-\mu^2}{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)} \underset{0}{\underset{\varkappa}{(v_\lambda^2 v_\mu^2)}} d\mu\, d\lambda$$

$$J' = \int_{0}^{1}\int_{1}^{\infty} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$J_1 = \int_{-1}^{0}\int_{1}^{\infty} \frac{\lambda^2-\mu^2}{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)} \frac{d}{dp} \underset{0}{\underset{\varkappa}{\underset{p}{(v_\lambda^2 v_\mu^2)}}} d\mu\, d\lambda$$

$$J_1' = \int_{0}^{1}\int_{1}^{\infty} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

während p^2 vernachlässigt wurde.

Eigentlich wird immer $\left(\frac{p}{\varkappa}\right)^2$ vernachlässigt, wie es dem wirklichen Zweizentrenproblem besser entspricht. Da der Koeffizient von $\frac{p}{\varkappa}$ auch $\varkappa$ enthält, haben wir sofort die Entwicklung nach p ausgeführt.

Da $\underset{0}{\underset{\varkappa}{(v_\mu^2)}}$ dem symmetrischen Problem angehört, ist sie eine gerade Funktion in μ und man sieht sofort, daß

$$J = J! \quad (25)$$

Zur Berechnung von J_1 und J_1' brauchen wir:

$$\underset{\varkappa}{\left|\frac{d}{dp}\underset{0}{\underset{\varkappa}{\underset{p}{(v_\lambda^2 v_\mu^2)}}}\right|} = 2\underset{0}{\underset{\varkappa}{(v_\lambda^2 v_\mu)}}\underset{0}{\underset{\varkappa}{\left(\frac{dv_\mu}{dp}\right)}} + 2\underset{0}{\underset{\varkappa}{(v_\mu^2 v_\lambda)}}\underset{0}{\underset{\varkappa}{\left(\frac{dv_\lambda}{dv}\right)}}, \quad (26)$$

also:

$$\underset{0}{\underset{\varkappa}{\left(\frac{dv_\mu}{dp}\right)}} \text{ und } \underset{0}{\underset{\varkappa}{\left(\frac{dv_\lambda}{dp}\right)}}.$$

Dazu betrachten wir die Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 v_\mu}{d\mu^2} + K_\mu v_\mu = 0$$

$$\frac{d^2 v_\mu}{d\mu^2} + (K_\mu + L_\mu \delta)\, v_\mu = 0$$

mit den Eigenfunktionen v_μ, bzw. $v_\mu + \eta_\mu \delta$, wo für η gilt:

$$v_\mu \frac{d^2\eta_\mu}{d\mu^2} - \eta_\mu \frac{d^2 v_\mu}{d\mu^2} = -L_\mu v_\mu^2 . \qquad (27)$$

Nehmen wir später

$$\delta = dp, \quad L_\mu = \frac{\partial K_\mu}{\partial p},$$

so wird:

$$\eta_\mu = \frac{dv_\mu}{dp}.$$

Vorläufig arbeiten wir aber mit den noch nicht spezialisierten Gleichungen weiter.

Setzt man in (27) für η_μ:

$$\eta_\mu = z v_\mu$$

so hat man für z:

$$\frac{d^2 z}{d\mu^2} + 2\frac{dv_\mu}{v_\mu}\frac{dz}{d\mu} = -L_\mu$$

$$\frac{dz}{d\mu} = \frac{C}{v_\mu^2} - \frac{1}{v_\mu^2}\int L_\mu v_\mu^2 d\mu =$$

$$= \frac{C' - \int_{-1}^{\mu} L_\mu v_\mu^2 d\mu}{v_\mu^2}.$$

Also nach wiederholter Integration:

$$z = D + \int_{\dot{-1}}^{\dot{\mu}} \frac{C' - \int_{-1}^{\mu} L_\mu v_\mu^2 d\mu}{v_\mu^2} d\mu .$$

Hieraus folgt für η_μ:

$$\eta_\mu = D v_\mu + v_\mu \int_{\dot{-1}}^{\dot{\mu}} \frac{C' - \int_{-1}^{\mu} L_\mu v_\mu^2 d\mu}{v_\mu^2} d\mu . \qquad (28)$$

Die Integrationsgrenzen wurden schon so gewählt, daß $\eta(-1) = 0$. Nach (21) soll auch $\eta(+1) = 0$ sein. In (28) würde der Integrand für $\mu = \mp 1$ zwei Unendlichkeitsstellen haben und dort sein:

$$\frac{C'}{v_\mu^2(-1)} \text{ und } \frac{C' - \int_{-1}^{+1} L_\mu v_\mu^2 d\mu}{v_\mu^2(+1)} = \frac{C'}{v_\mu^2(+1)} .$$

Über diese Stellen hinweg integriert würden die Beiträge von der Ordnung

$$\frac{C'}{v_\mu(-1)} \text{ und } \frac{C'}{v_\mu(+1)}$$

[vgl. (12)] und nach Multiplikation mit $v_\mu(-1)$, bzw. $v_\mu(+1)$ würde der zweite Term in (28) für $\mu = +1$ nicht verschwinden. Deshalb muß:

$$C' = 0$$

sein. Auch ist klar, daß, wenn identisch $L_\mu = 0$ ist, auch $\eta_\mu = 0$ sein soll, so daß wir zu nehmen haben:

$$D = 0 .$$

Schließlich ergibt sich also:

$$\eta_\mu = -v_\mu \int_{\dot{-1}}^{\dot{\mu}} \frac{\int_{-1}^{\mu} L_\mu v_\mu^2 d\mu}{v_\mu^2} d\mu .$$

Analog würde für Gleichung (5) mit der Eigenfunktion v_λ und Gleichung (19) mit der Eigenfunktion $v_\lambda + \eta_\lambda \delta$ für η_λ folgen:

$$\eta_\lambda = -v_\lambda \int_{\dot{1}}^{\dot{\lambda}} \frac{\int_{1}^{\lambda} L_\lambda v_\lambda^2 d\lambda}{v_\lambda^2} d\lambda .$$

Spezialisieren wir nun wieder dadurch, daß wir

$$d = dp, \; L_\mu = \frac{\partial K_\mu}{dp}, \; L_\lambda = \frac{\partial K_\lambda}{\partial p}$$

und überdies $p = 0$ nehmen, so haben wir nach (8) (7) einzusetzen:

$$L_\mu = \frac{-\left.\frac{\partial A}{\partial p}\right|_{p=0} + \mu^2 \left.\frac{\partial \gamma}{\partial p}\right|_{p=0}}{1-\mu^2} + \frac{2\varepsilon\mu}{1-\mu^2}$$

$$L_\lambda = \frac{\left.\frac{\partial A}{\partial p}\right|_{p=0} - \lambda^2 \left.\frac{\partial \gamma}{\partial p}\right|_{p=0}}{\lambda^2 - 1} .$$

Die benötigten Differentialquotienten haben wir für $\varkappa$ und p in (22) (23) gefunden.

Da $\left(v_{\mu}^2\right)_{\substack{\varkappa \\ 0}}$ eine gerade Funktion von μ ist, ist also

$$\left.\frac{\partial A}{\partial p}\right|_{p=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial \gamma}{\partial p}\right|_{p=0} = 0 .$$

Wir brauchen also nur zu substituieren:

$$L_\mu = \frac{2\varepsilon\mu}{1-\mu^2}, \; L_\lambda = 0$$

und finden:

$$\left.\frac{\partial v_\mu}{\partial p}\right|_{p=0} = \eta_\mu \Big|_{p=0} = -v_\mu \int_{-1}^{\mu} \frac{\int_{-1}^{\mu} \frac{2\varepsilon\mu}{1-\mu^2} v_\mu^2 d\mu}{v_\mu^2} d\mu$$

$$\left.\frac{\partial v_\lambda}{\partial p}\right|_{p=0} = \eta_\lambda \Big|_{p=0} = 0 .$$

Wir haben also nach (26):

$$\left|\frac{d}{dp}\left(v_\lambda^2 v_\mu^2\right)\right|_{\substack{\varkappa \\ 0}}^{p} = -4\varepsilon v_\mu^2 v_\lambda^2 \int_{-1}^{\mu} \frac{\int_{-1}^{\mu} \frac{\mu v_\mu^2}{1-\mu^2} d\mu}{v_\mu^2} d\mu$$

mit $\varkappa = \varkappa$, $p = 0$ als Indizes für v_μ und v_λ.

Zerlegen wir diesen Ausdruck mittels einer Konstanten P und einer ungeraden Funktion $U(\mu)$:

$$\left|\frac{d}{dp}\left(v_\lambda^2 v_\mu^2\right)\right|_{\substack{\varkappa \\ 0}}^{p} = -4\varepsilon v_\lambda^2 v_\mu^2 \left(P + U(\mu)\right),$$

so ist:

$$U(\mu) = \int_{0}^{\mu} \frac{\int_{-1}^{\mu} \frac{\mu \left(v_\mu^2\right)_{\substack{\varkappa \\ 0}}}{1-\mu^2} d\mu}{\left(v_\mu^2\right)_{\substack{\varkappa \\ 0}}} d\mu$$

und P selber ein Integral von -1 bis 0 statt von 0 bis μ. Wir haben nun:

$$J_1 = -4\varepsilon \int_{-1}^{0} \int_{1}^{\infty} \frac{\lambda^2-\mu^2}{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)} \left(v_\lambda^2 v_\mu^2\right)_{\substack{\varkappa \\ 0}} \left(P + U(\mu)\right) d\lambda d\mu \qquad (29)$$

$$J_1' = -4\varepsilon \int_{0}^{1} \int_{1}^{\infty} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots d\lambda d\mu . \qquad (30)$$

Wegen (24) (25) ist aber bei Vernachlässigung von p^2:

$$\left(\frac{H_1}{H_2}\right)_{\substack{\varkappa \\ p}} = 1 + \frac{J_1 - J_1'}{J} p .$$

Benutzen wir in J als neue Integrationsvariable: $\mu = -\mu$, so ergibt sich, daß P aus $J_1 - J_1'$ fortfällt und daß die Beiträge beider U sich addieren wegen $U(-\mu) = -U(\mu)$.

Nach Eintragen von (29) (30) bekommen wir also:

$$\left(\frac{H_1}{H_2}\right)_{\substack{\varkappa \\ p}} = 1 + p D(\varepsilon)_{\varkappa 0}$$

wobei:

$$D(\varepsilon)_{\varkappa 0} = \frac{8\varepsilon}{N} \int_{0}^{1} \int_{1}^{\infty} \frac{\lambda^2-\mu^2}{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)} \left(v_\lambda^2 v_\mu^2\right)_{\substack{\varkappa \\ 0}} U(\mu) d\mu d\lambda ,$$

also nur aufgebaut ist aus Größen, die dem symmetrischen Falle $(\varkappa, o)$ angehören.

Wir brauchen offenbar die Eigenfunktionen $(v_\mu)_{\substack{\varkappa \\ 0}}$ und $(v_\lambda)_{\substack{\varkappa \\ 0}}$ der Differentialgleichungen (13) und (14), worin wir gesetzt haben:

$$\varepsilon = \varepsilon'$$

$$A_{\varkappa 0} = A(\varepsilon')_{\varkappa 0} = A(\varkappa\varepsilon')$$

$$\gamma_{\varkappa 0} = \gamma(\varepsilon')_{\varkappa 0} = \gamma(\varkappa\varepsilon') .$$

Für eine numerische Berechnung empfiehlt es sich aber mehr zu den Funktionen $(\psi_\lambda)_{\substack{\varkappa \\ 0}}$ und $(\psi_\mu)_{\substack{\varkappa \\ 0}}$ zurückzukehren, wofür wir hatten:

$$(\psi_\mu)^2_{\substack{\varkappa \\ 0}} = \frac{\left(v_\mu^2\right)_{\substack{\varkappa \\ 0}}}{1-\mu^2} ; \quad \left(\psi_\lambda^2\right)_{\substack{\varkappa \\ 0}} = \frac{\left(v_\lambda^2\right)_{\substack{\varkappa \\ 0}}}{\lambda^2-1} . \qquad (31)$$

Zerlegen wir noch:

$$\lambda^2 - \mu^2 = (\lambda^2 - 1) + (1 - \mu^2)$$

so können alle Doppelintegrale in Produkte einfacher Integrale transformiert werden und wir gelangen zu:

$$D(\varepsilon)_{\varkappa 0} = 4\varepsilon \, \frac{\int_0^1 \psi_\mu^2 U(\mu) d\mu \int_1^\infty \lambda^2 \psi_\lambda^2 d\lambda - \int_0^1 \mu^2 \psi_\mu^2 U(\mu) d\mu \int_1^\infty \psi_\lambda^2 d\lambda}{\int_0^1 \psi_\mu^2 d\mu \int_1^\infty \lambda^2 \psi_\lambda^2 d\lambda - \int_0^1 \mu^2 \psi_\mu^2 d\mu \int_1^\infty \psi_\lambda^2 d\lambda}$$

mit:

$$U(\mu) = \int_0^{\mu} \frac{\int_{-1}^{\mu} \mu \psi_\mu^2 \, d\mu}{(1-\mu^2)\psi_\mu^2} = d\mu$$

wo wiederum die Indizes $\varkappa$ und o bei ψ_μ und ψ_λ hinzuzudenken sind.

Für $\underset{\varkappa\,0}{(\psi_\mu)}$ und $\underset{\varkappa\,0}{(\psi_\lambda)}$ haben wir nach (2), (3) bei $\varepsilon = \varepsilon'$ die Gleichungen:

$$(\lambda^2-1)\frac{d^2\psi_\lambda}{d\lambda^2} + 2\lambda\frac{d\psi_\lambda}{d\lambda} + \left[A + 2\varkappa\varepsilon'\lambda - \gamma\lambda^2\right]\psi_\lambda = 0$$

$$(1-\mu^2)\frac{d^2\psi_\mu}{d\mu^2} - 2\mu\frac{d\psi_\mu}{d\mu} + \left[-A + \gamma\mu^2\right]\psi_\mu = 0,$$

wo wir die Indizes $\varkappa$, o bei ψ_λ und ψ_μ fortgelassen haben.

Führen wir mit Burrau ein:

$$\underset{\varkappa\,0}{(\sigma_\mu)} = -\frac{1}{\underset{\varkappa\,0}{(\psi_\mu)}}\frac{d}{d\mu}\underset{\varkappa\,0}{(\psi_\mu)} \tag{32}$$

$$\underset{\varkappa\,0}{(\sigma_\lambda)} = -\frac{1}{\underset{\varkappa\,0}{(\psi_\lambda)}}\frac{d}{d\lambda}\underset{\varkappa\,0}{(\psi_\lambda)}, \tag{33}$$

so bekommen wir, wenn die Indizes $\varkappa$, o vorläufig durch einen Strich bei σ ersetzt werden:

$$\frac{d\sigma_\lambda'}{d\lambda} = \sigma_\lambda'^2 - \frac{\gamma(\varkappa\varepsilon')\lambda^2 - 2(\varkappa\varepsilon' - \sigma_\lambda')\lambda - A(\varkappa\varepsilon')}{\lambda^2-1}$$

$$\frac{d\sigma_\mu'}{d\mu} = \sigma_\mu'^2 + \frac{\gamma(\varkappa\varepsilon')\mu^2 + 2\sigma_\mu'\mu - A(\varkappa\varepsilon')}{1-\mu^2}.$$

Setzt man $\varkappa\varepsilon' = \varepsilon$, so sind die Gleichungen genau die von Burrau bei $\varepsilon = \varepsilon$, und die Lösung ist also:

$$\left.\begin{matrix}\underset{\varkappa\,0}{(\sigma_\lambda)} \\ \underset{\varkappa\,0}{(\sigma_\mu)}\end{matrix}\right\} \text{ beim Parameter } \varepsilon = \varepsilon' \equiv \left.\begin{matrix}\sigma_\lambda \\ \sigma_\mu\end{matrix}\right\} \text{ von Burrau}^1) \text{ bei } \varepsilon = \varkappa\varepsilon'$$

Die Funktionen im rechten Glied können wir aber nach der von Burrau angegebenen Entwicklungen bestimmen, nämlich

σ_μ von $\mu = o$ und von $\mu = \pm 1$ aus,
σ_λ von $\lambda = 1$ und von $\lambda = \infty$ aus.

Wir brauchen nur seine A, γ und ε zu nehmen bei $\varepsilon = \varkappa\varepsilon'$.

Sind $\underset{\varkappa\,0}{(\sigma_\lambda)}$ und $\underset{\varkappa\,0}{(\sigma_\mu)}$ so gefunden, dann folgen aus (32) (33):

$$\underset{\varkappa\,0}{(\psi_\mu^2)} = e^{-2\int_{-1}^{\mu}\underset{\varkappa\,0}{(\sigma_\mu)}\,d\mu} \tag{32a}$$

$$\underset{\varkappa\,0}{(\psi_\lambda^2)} = e^{-2\int_{1}^{\lambda}\underset{\varkappa\,0}{(\sigma_\lambda)}\,d\lambda} \tag{33a}$$

1) Diese Funktionen sollten in unserer Bezeichnungsweise eigentlich $\underset{1\,0}{(\sigma_\lambda)}$ und $\underset{1\,0}{(\sigma_\mu)}$ heißen.

und dann aus (31) $\underset{\varkappa\,0}{(v_\mu^2)}$ und $\underset{\varkappa\,0}{(v_\lambda^2)}$ und so kann man D bestimmen.

In § 2 wird uns jedoch nur das Verhältnis der Elektronenladung links und rechts interessieren in Zweizentrenproblemen, wo die Zentren zwar eine verschiedene positive Ladung tragen, aber doch immer eine Gesamtladung $+e$ besitzen.

Für solche neutrale Zweizentrenprobleme ist nach (9)

$$\varkappa = \frac{1}{2}.$$

Für derartig kleine Werte von $\varkappa$ wird die Bestimmung von σ_λ und σ_μ bei $\varepsilon = \varkappa\varepsilon' = \frac{1}{2}\varepsilon'$ recht einfach, wenn wir, wie es in der Kristalltheorie erlaubt ist, $\varepsilon' < 4$ oder 5 wählen.

Für $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2} = 1$ fand Burrau $\gamma = 0{,}724$, $A = 0{,}251$. Die σ_μ-Funktion (von Burrau) kann man konstruieren mit den von ihm angegebenen Reihenentwicklungen von $\mu = o$ aus und von $\mu = \pm 1$ aus. Es ergibt sich, daß die Kurve fast genau eine Gerade ist, und zwar:

$$\sigma_\mu = -A\mu. \tag{34}$$

Die größte Abweichung hat man bei $\mu = 1$. Dort ist nach Burrau:

$$\sigma_\mu = \sigma_1 = \frac{1}{2}(A-\gamma) = -0{,}236$$

und der Fehler würde hier also $\frac{3A-\gamma}{2} = 0{,}015$ betragen, was relativ äußerst klein ist.

Auch für $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2} = 2$ weicht die σ_μ-Kurve wenig von einer Geraden ab. Für $\varepsilon = 2$ fand Burrau nämlich $\gamma = 2{,}202$, $A = 0{,}810$ und der größte Fehler ist dann $0{,}11$, noch ziemlich klein in bezug auf $\sigma_1 = -0{,}70$.

Die Annäherung von σ_μ mittels einer Geraden (34) wird überall dort zweckmäßig sein, wo

$$\text{der maximale Fehler} \ll \sigma_1$$

also

$$\frac{3A-\sigma}{2} \ll \frac{\gamma - A}{2}.$$

Nun fand Burrau schon, daß bei kleinen Werten von γ (d. h. nach den Kurven für γ) bei kleinen Werten von ε immer die Beziehung

$$\gamma = 3A$$

näherungsweise galt, so daß wir die Annäherung (34) für die Burrausche Kurve benützen können, wenn es sich um einen Parameter

$$0 < \varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2} < 2$$

handelt.

Das gibt nun nach (31) (32a) (33a)

$$\left(v_\mu^2\right)_{1/2\,0} = e^{-A\left(\frac{\varepsilon'}{2}\right)} (1-\mu^2)\, e^{A\left(\frac{\varepsilon'}{2}\right)\mu^2}$$

und hiermit findet man leicht:

$$U(\mu) = -\frac{1}{2A\left(\frac{\varepsilon'}{2}\right)} \int_0^\mu \frac{e^{A\left(\frac{\varepsilon'}{2}\right)(1-\mu^2)} - 1}{1-\mu^2}\, d\mu.$$

Beide Formeln sind in $D(\varepsilon')$ einzutragen. Dort brauchen wir auch noch die Integrale mit (v_λ^2). Wie gesagt, ist (σ_λ) bei $\varepsilon = \varepsilon'$ identisch mit der Burrauschen Funktion σ_λ bei $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2}$.

Für $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2} = 1$ fand er: $A = 0{,}251$, $\gamma = 0{,}724$.

Nach der von ihm angegebenen Reihenentwicklung läßt sich die Funktion σ_λ nun darstellen.

Die Ordinate σ_λ ändert sich nur wenig und immer monoton. Diese fängt bei $\lambda = 1$ an mit dem Werte

$$\sigma_{1\lambda} = \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{A\left(\frac{\varepsilon'}{2}\right)}{2} - \frac{\gamma\left(\frac{\varepsilon'}{2}\right)}{2} = 0{,}763$$

und nähert sich asymptotisch dem Werte:

$$\sigma_\infty = \sqrt{\gamma\left(\frac{\varepsilon'}{2}\right)} = 0{,}851.$$

Einen gleichartigen Verlauf zeigt die σ_λ-Kurve für $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2} = 2$ ($\gamma = 2{,}202$, $A = 0{,}810$, $\sigma_{1\lambda} = 1{,}304$, $\sigma_\infty = 1{,}484$). Auch hier ändert sich σ_λ relativ nur sehr wenig. Wir werden also für das ganze Gebiet

$$0 < \varepsilon' < 4\,, \text{ also } 0 < \frac{\varepsilon'}{2} < 2$$

die Funktion annähernd darstellen durch:

$$\sigma_\lambda = \sigma_\infty - \frac{\sigma_\infty - \sigma_1}{\lambda},$$

die auch monoton verläuft, den richtigen Wert in $\lambda = 1$ gibt und für $\lambda = \infty$ asymptotisch zu σ_∞ geht. Hiermit bekommen wir dann:

$$\left(v_\lambda^2\right)_{1/2\,0} = e^{2\sigma_\infty}(\lambda^2 - 1)\, \lambda^{2(\sigma_\infty - \sigma_1)}\, e^{-2\sigma_\infty \lambda}$$

und so die in D auftretenden Integrale nach λ. Nach einfacher Herleitung gelangt man dann zu der Formel (wenn wir statt ε' wieder ε schreiben):

$$D(\varepsilon)_{1/2\,0} = -\frac{4\varepsilon}{A} \frac{\int_0^1 (K-\mu^2)\, e^{A\mu^2} \int_0^\mu \frac{e^{A(1-\mu^2)}-1}{1-\mu^2}\, d\mu\, d\mu}{\int_0^1 (K-\mu^2)\, e^{A\mu^2} d\mu},$$

worin für A zu denken ist: $A\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ und:

$$K = \frac{\int_1^\infty \lambda^2 \psi_\lambda^2\, d\lambda}{\int_1^\infty \psi_\lambda^2 d\lambda} = \frac{\int_1^\infty \lambda^{2(\sigma_\infty - \sigma_1 + 1)}\, e^{-2\sigma_\infty \lambda}\, d\lambda}{\int_1^\infty \lambda^{2(\sigma_\infty - \sigma_1)}\, e^{-2\sigma_\infty \lambda}\, d\lambda}$$

Zum Zwecke einer numerischen Berechnung führen wir lieber ein endliches Integrationsgebiet ein mittels:

$$\lambda = \frac{1}{t}$$

und bekommen dann:

$$K = \frac{\int_0^1 t^{2(\sigma_1 - \sigma_\infty - 2)} e^{-\frac{2\sigma_\infty}{t}}\, dt}{\int_0^1 t^{2(\sigma_1 - \sigma_\infty - 1)} e^{-\frac{2\sigma_\infty}{t}}\, dt}.$$

Da $\lambda^2 \geqq 1$ ist $K > 1$ und da $A\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) > 0$ und $\mu^2 < 1$, sehen wir sofort, daß

$$D(\varepsilon)_{1/2\,0} < 0\,,$$

in Übereinstimmung mit einem vom Verfasser[1]) bewiesenen Theorem, nach welchem die Ladungsdichte in zwei symmetrisch gelegenen Punkten links immer kleiner ist als rechts, wenn links das schwächer positiv geladene Zentrum steht. Dort war das Resultat nur qualitativ, jedoch für beliebige positive Ladungen der Zentren bewiesen. Hier ist unser Ergebnis quantitativ, gilt aber nur dort, wo die Asymmetrie der zentralen Ladungen nicht zu groß ist, so daß $\left(\frac{p}{\varkappa}\right)^2$ zu vernachlässigen war. Nichts steht im Wege in dieser Methode auch noch den Term mit p^2 in Rechnung zu bringen, aber wir möchten darauf der Einfachheit halber verzichten.

§ 2. Berechnen wir nun das Streuvermögen der Atome in den Kristallgittern vom Diamant- und Wurzittyp.

Vorläufig betrachten wir die Gitter von *BeO*, und *C*.

Jedes Atom (z. B. *Be*) steht dann im Zentrum eines Oktaeders, in dessen vier Eckpunkten sich jedesmal ein Atom der anderen Art (z. B. *O*) befindet, aber auch dieses steht im Zentrum eines von vier Atomen erster Art (*Be*) gebildeten Oktaeders. Zwischen diesen Oktaedern befinden sich große Lücken, wie man z. B. an den Abbildungen in Ewalds Buch sehen kann. Das berechtigt uns, die Oktaeder in erster Näherung einzeln zu betrachten.

1) K. F. Niessen, Physik. Zeitschr. **29**, 52, 1928.

Eigentlich sollte man nicht von „Atomen“ *Be*, *O*, usw. sprechen, denn wir nehmen an, daß die Atome all ihre äußeren Elektronen abgeben, wenn sie zu einem Kristallgitter zusammentreten. Die abgegebenen Elektronen sorgen für die Bindung der übriggebliebenen positiven Atomreste. Diese Atomreste sind in den betrachteten Fällen Heliumkonfigurationen, aber außerordentlich verkleinert, wegen der hohen positiven Ladung des Kernes.

Wir werden deshalb diese K-Schale in den Kern gezogen denken und betrachten die Atomreste als positive Punktladungen $+p_1\varepsilon$ und $+p_2\varepsilon$, wenn das Atom ursprünglich in der p_1-ten, bzw. p_2-ten Spalte des periodischen Systems gestanden hat.

in allen Gittern vom Diamant- und Wurzittyp von Grimm und Sommerfeld[1]) vorgeschlagen.

Ein Atomrest erster Art, dessen Ladung $+p_1\varepsilon$ war, wird so von 8 Elektronen „besucht“, gleichfalls der Atomrest mit Ladung $+p_2\varepsilon$.

Die Fig. 1 stellt diese Bindung schematisch dar. Früher nahm Verfasser an, daß die Elektronen jedesmal in Gruppen von zwei auf einer Ellipse liefen. Wir wissen nun nach Schrödinger, daß es solche Bahnen nicht gibt, daß vielmehr die Elektronen räumlich zu verschmieren sind.

Wir möchten annehmen, daß diese Verschmierung jedes Elektrons in erster Näherung wie in einem Zweizentrenproblem stattfinden wird.

Die Frage ist nur, welche Ladungen den Zentren dabei zuzuschreiben sind.

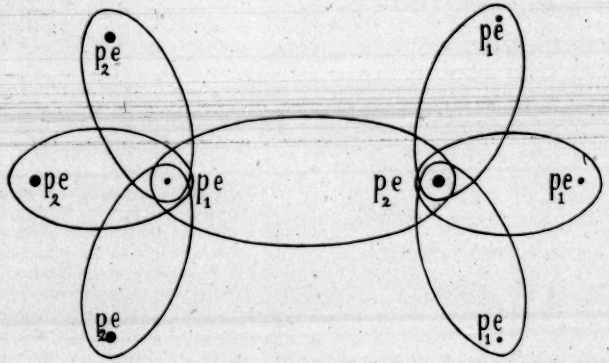


Fig. 1.

Für alle bis jetzt bekannten Kristalle von Diamant- und Wurzittyp ist:

$$4 - p_1 = p_2 - 4, \tag{35}$$

d. h. die Atome stehen gleich weit von der vierten Spalte entfernt (oder befinden sich in derselben). Es werden aus jedem Paare ungleichartiger Atome also $p_1 + p_2 = 8$ Elektronen frei.

Von diesen sorgen nur 2 Elektronen für die Bindung von beiden Atomresten. Denn das erste Atom gibt zwar p_1 Elektronen ab, hat aber 4 Nachbarn und gibt einem dieser sozusagen $\frac{p_1}{4}$ Elektronen. Umgekehrt empfängt es von einem bestimmten Nachbar auch nur $\frac{p_2}{4}$ Elektronen, so daß wir mit der Gesamtzahl frei gewordener Elektronen in Übereinstimmung bleiben, wenn wir annehmen, daß die Bindung zweier Nachbarn jedesmal durch 2 Elektronen [nämlich $(p_1 + p_2) : 4$] zustande kommt. Eine solche Bindung wurde

Wir können die wellenmechanisch verteilte Ladung eines einzelnen Elektrons in zwei Hälften zerlegen: in eine Wolke von der Ladung $-w_1\varepsilon$ um dem Atomrest R_1 und in eine andere von der Ladung $-w_2\varepsilon$ um R_2 (vgl. Fig. 2). Weil wir die ganze Ladung $-\varepsilon$ so aufteilen wollen, haben wir:

$$w_1 + w_2 = 1. \tag{36}$$

Man kann darum einen plausiblen Wert für w_1 und w_2 einzeln bekommen. Störten die Elektronen einander nicht, so würden wir nehmen:

$$\underset{x'}{\frac{w_1}{w_2}} = \underset{p'}{\left(\frac{H_1}{H_2}\right)},$$

wobei $x' = \frac{p_1 + p_2}{2}$ und $p' = \frac{p_2 - p_1}{2}$, da die Zentren dann ungeschwächt mit ihren Ladungen $+p_1\varepsilon$ und $+p_2\varepsilon$ auf das Elektron einwirken

1) H. Grimm und A. Sommerfeld, Zeitschr. f. Phys. **36**, 36, 1926.

würden. Die Elektronen aber stören einander und wenn wir ein einzelnes Elektron betrachten, das die Verbindung zwischen den in Fig. 2 gezeichneten Atomresten R_1 und R_2 unterhält, so sehen wir dieses in der Gegend von R_1 gestört von 6 „fremden" Elektronen, die zwischen R_1 und 3 anderen Atomresten zweiter Art hin- und herlaufen, indem es in der Gegend von R_2 auch von 6 fremden Elektronen (wieder anderen) gestört wird. Seinen Kollegen (denn es gibt ja zwei Elektronen zwischen den gezeichneten R_1 und R_2) stört es sowohl bei R_1 wie bei R_2 und unterwegs. Wir werden nun diese komplizierte Störung in erster Näherung dadurch in Rechnung bringen, daß wir um R_1 eine negative Wolke von der Gesamtladung $-7\,w_1 e$ und um R_2 eine

Das Verhältnis der Ladung links und rechts können wir nach § 1 angeben, denn die Gesamtladung der Zentren beträgt nun, in e als Einheit ausgedrückt:

$$2\varkappa = p_1 + p_2 - 7\,(w_1 + w_2).$$

Also ist nach (35) und (36):

$$\varkappa = \frac{1}{2},$$

d. h. wir haben es hier mit neutralen Zweizentrenproblemen zu tun, wobei:

$$\varkappa = \frac{1}{2}$$

$$p = \frac{p_2 - p_1 - 7\,(w_2 - w_1)}{2}. \qquad (37)$$

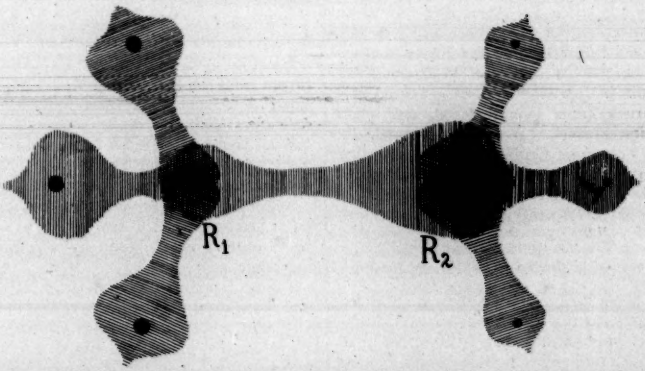


Fig. 2.

derartige von der Gesamtladung $-7\,w_2 e$ annehmen.

Alle Elektrizität die sich innerhalb zweier um R_1 bzw. R_2 (mit $\frac{1}{2}R_1R_2$ als Radius) beschriebenen Kugeln befindet und von den störenden Elektronen herrührt, denken wir uns (nur für die Bahnbestimmung des gesondert betrachteten Elektrons) in R_1 und R_2 zusammengezogen.

Wie groß nun die effektiven Ladungen:

$$(p_1 - 7\,w_1)\,e \quad \text{und} \quad (p_2 - 7\,w_2)e$$

sind, nach welchen das eine Elektron durchschnittlich von R_1 und R_2 angezogen wird, wissen wir noch nicht, weil ja w_1 und w_2 noch unbekannt sind.

Aber wir können diese effektiven Ladungen zu gleicher Zeit mit w_1 und w_2 aus ein und derselben Gleichung bestimmen. Sie müssen ja so sein, daß das eine Elektron wellenmechanisch von ihnen so verteilt wird, daß die Ladung auf der einen Hälfte wieder $-w_1 e$ und die auf der anderen Hälfte wieder $-w_2 e$ beträgt.

Das Verhältnis der Ladungen links und rechts ist dabei:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{1 - w_2}{w_2} = \left(\frac{H_1}{H_2}\right)_{\substack{x \\ p}} = 1 + \underset{1/2\,0}{D(\varepsilon)} \cdot p. \qquad (38)$$

Daraus ergibt sich für w_2 bei Vernachlässigung von p^2

$$w_2 = {}^1/_2 - \frac{p}{4\,\underset{1/2\,0}{D(\varepsilon)}}.$$

Setzt man noch den Wert (37) für p ein, mit $w_1 = 1 - w_2$ und führt man noch eine Größe u ein mittels:

$$p_2 - 4 = 4 - p_1 = u,$$

so daß u im periodischen System den horizontalen Abstand der Atome zu der vierten Spalte mißt, so bekommt man die Formel:

$$w_2 = {}^1/_2 + u\,\frac{\underset{1/2\,0}{D(\varepsilon)}}{7\,\underset{1/2\,0}{D(\varepsilon)} - 4}. \qquad (39)$$

Nun könnte man aus den Beobachtungen von

Ott[1]) auch einen Ausdruck für w_2 ableiten. Er fand das Streuvermögen ungefähr mit der Annahme neutraler Atome in Übereinstimmung. Nach den Experimenten muß man also schließen auf:

$$p_1 - 8\,w_1 = 0,$$
$$p_2 - 8\,w_2 = 0,$$

woraus z. B.

$$w_2 = \frac{p_2}{8} = \frac{4+u}{8} = {}^1/_2 + \frac{u}{8} \qquad (39a)$$

Wir haben nun ganz auf theoretischem Wege für w_2 den Ausdruck (39) gefunden, worin der Faktor $\frac{D}{7D-4}$ für $D=0$ bis $D=-\infty$ die Werte von 0 bis $1/7 = 0{,}143$ durchläuft.

Sie ist entstanden aus der Forderung, daß die Verteilung jedes Elektrons den effektiven Ladungen der Zentren entsprechen sollte, welche umgekehrt auch wieder von der Elektronenverteilung abhingen, so daß eine Wechselwirkung entstand, die in den Gleichungen (38) und (37) zum Ausdruck kam. Die Tatsache, daß schon dadurch eine Formel (39) für w_2 entstand, die durch ihre Form und Größe schon einigermaßen an die experimentelle Formel (39a) erinnert, spricht sehr für die Richtigkeit unserer Auffassung.

Nur wenn $D\,(\varepsilon)$ nahe an Null herankommt, würde unsere Theorie nicht haltbar sein.
$\underset{1/2\,0}{}$

$D\,(\varepsilon)$ war eine Funktion des Atomabstandes ($\varepsilon\, a_H$). Ist dieser null ($\varepsilon = 0$), so sind die Zentren zusammengefallen und die Elektronenwolke umhüllt das Doppelzentrum kugelsymmetrisch, so daß dann links und rechts sich gleichviel Ladung befindet, weshalb:

$$D\,(0) = 0\,.$$
$\underset{1/2\,0}{}$

Für einen Atomabstand, wo $0 < \varepsilon < 4{,}5$ konnten wir $D\,(\varepsilon)$ nach der in § 1 gegebenen Methode
$\underset{1/2\,0}{}$
berechnen. Es ergeben sich dann die in Tabelle 1 gesammelten Werte.

Tabelle 1.

$\varepsilon = 0$	$D = 0$
1	-2
2	-4
3	-7
4	-11

Bei der Ableitung unserer Formel (39) wurde die Asymmetrie stets nur bis zur ersten Potenz in Rechnung gebracht. Mathematisch streng gilt die Formel also nur für kleine Werte von u, die offenbar keine physikalische Bedeutung haben, weil $u = 0, 1, 2, 3$ ist. ($u = 4$ tritt nicht auf, da die Edelgase keine Verbindung bilden.)

Für solche Werte von u gibt unsere Formel nur eine erste Annäherung. Nach den experimentellen Tatsachen (vgl. 39a) ist es aber sehr wahrscheinlich, daß diese erste Näherung die Hauptrolle spielt.

Wir werden unsere Formel deshalb auch anwenden für $u = 1, 2, 3$.

Für ihre Anwendbarkeit auch für solche u-Werte spricht die Tatsache, daß sie uns immer

$$\tfrac{1}{2} < w_2 < \tfrac{1}{2} + \frac{3}{7} < 1$$
$$0 < w_1 < \tfrac{1}{2}$$

gibt, da w_2 bei $D = -\infty$ und $u = 3$ seinen höchsten Wert $\frac{1}{2} + \frac{3}{7}$ erreicht und dann noch unter 1 bleibt.

Es könnte befremden, daß wir niemals $w_2 = 1$, $w_1 = 0$ finden können, wie es doch bei $\varepsilon = \infty$ nach Hund der Fall sein soll. Der Grund liegt darin, daß dieser asymmetrische Zustand sich nicht von einem symmetrischen aus entwickeln läßt, da bei $\varepsilon = \infty$ das stärker geladene Zentrum alle Elektronenladung an sich zieht, wie wenig seine positive Ladung auch die des anderen Zentrums übertrifft.

Der kleinste Atomabstand (in C) im Kristallgitter beträgt 1,54 A^0. Da der Bohrsche Radius im unangeregten H-Atom, $a_H = 0{,}53\ A^0$ ist, hat man hier $\varepsilon = 3$.

Für die meisten Kristallgitter vom Diamant- und Wurzittyp liegt der Atomabstand zwischen 2 A^0 und 2,5 A^0, also beträgt ε dort 4 bis 5.

Man bedenke, daß unsere Formel für w_2 nur Gültigkeit hat für Kristalle, deren Atome auf die K-Schale abbauen, also für BeO, C, weil dann die inneren Schalen, die überdies wegen der großen Kernladung noch sehr kontrahiert werden, mathematisch in dem Kern gedacht werden können.

Für die anderen Kristallgitter, wo beide oder eins der Atome auf die L-Schale abbauen, kann unsere Formel a priori nur eine grobe Annäherung geben. Zwar wird der Einfluß dieser Schalen indirekt in Rechnung gebracht durch den experimentell bestimmten größeren Atomabstand, aber in wieweit es erlaubt ist, dann noch mit reinen Zweizentrenproblemen zu rechnen, läßt sich nicht so einfach untersuchen. Wir werden versuchsweise unsere Formel auch auf jene Kristallgitter anwenden.

Sind die Atome im periodischen System weit von der vierten Spalte entfernt, so muß man in der Entwicklung nach der früheren Größe p auch noch höhere Potenzen von p betrachten. Aus der Definition von D geht aber hervor, daß D sein Zeichen ändern muß, wenn die Zentren vertauscht werden, so daß es nur von ungeraden Potenzen

1) H. Ott, Zeitschr. f. Krist. **61**, 529, 1925; **62**, 217, 1925; Zeitschr. f. Phys. **22**, 212, 1924.

von p abhängen kann, so daß wir auch noch in solchen Fällen nicht zu schlechte Ergebnisse erwarten können, wenn unsere Formel (39) benutzt wird.

Haben wir nun auf dem beschriebenen Wege w_2 und $w_1 = 1 - w_2$ gefunden, so ist auch das Streuvermögen S der Atome bekannt. Das Verhältnis ist offenbar:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{Z_1 - p_1 + 8w_1}{Z_2 - p_2 + 8w_2},$$

wo Z_1 und Z_2 die Ordnungszahlen der Atome im periodischen System sind, so daß Zähler und Nenner im rechten Glied sozusagen die Elektronenzahlen angeben.

Wir haben nun für die in Tabelle 2 erwähnten Kristalle die Werte für S_1/S_2 nach Formel (39) berechnet. Vollständigkeitshalber fügen wir noch die aus der früheren Kosselschen Bindungstheorie folgende hinzu. Diese berechnet man mit:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{Z_1 - p_1}{Z_2 - p_1},$$

weil Kossel annahm, daß die p_1 äußeren Elektronen vom ersten Atom die äußere Schale des anderen Atoms zu einer vollständigen Edelgasschale ergänzen. Die benutzten Atomabstände findet man in Å-Einheiten in Landolt-Börnstein, Physikalisch-Chemische Tabellen, 5. Aufl., 1. Ergänzungsband, S. 393, 396, 397.

Kristall	ε	$-D$	u	w_2	w_1	S_1/S_2 Verfasser	S_1/S_2[1]) Exper.	S_1/S_2 Kossel
Diamant C	3	7	0	0,5	0,5	1	1	0,2
Silicium Si	4,5	14	0	0,5	0,5	1	1	0,56
Zinkblende ZnS	4,5	14	2	0,774	0,226	1,84	1,9	1,56
AlN	3,6	9	1	0,634	0,366	1,83	1,8—2,3	1
Carborund SiC	3,6	9	0	0,5	0,5	2,33	2,33	1
BeO	3,1	7,5	2	0,766	0,234	0,48	0,5—0,67	0,2

Die befriedigende Übereinstimmung zwischen unseren theoretischen Werten und den experimentellen Tatsachen spricht sehr für die Richtigkeit der Grimm-Sommerfeldschen Auffassung des Bindungsprozesses, wenn diese nur nach obigem in Verbindung mit der Wellenmechanik gebracht wird. Daß hier wirklich ein Walten der Wellenmechanik statt der älteren Quantentheorie ans Licht tritt, sieht man am deutlichsten bei ZnS. Dafür fand Verfasser[2]) früher nach der alten Theorie: $S_1/S_2 = 2{,}36 - 2{,}38$, was damals zu dem Schluß führte, daß etwas in der Auffassung unrichtig sein mußte (S. 303). Offenbar war die Quantentheorie selber schuld daran und es konnte nur mittels der Wellenmechanik Übereinstimmung mit der Erfahrung erhalten werden.

Ohne die aus Tabelle 2 hervorgehende Übereinstimmung konnte es schon eine Stütze der Theorie heißen, daß wir für „mathematisch" kleine Werte von u eine Formel für w_2 bekamen, die bei den gewöhnlichen Atomabständen in Kristallen ($\varepsilon = 3$ bis 5) durch ihre Form und Größe an die experimentell abgeleitete Formel (39a) erinnerte.

Utrecht, 31. Dezember 1927.

(Eingegangen 2. Januar 1928.)

1) H. Ott l. c.
2) K. F. Niessen, Physik. Zeitschr. **27**, 302, 1926.

Über die Brownsche Bewegung.

Von

Kulesh Ch. Kar und Mohinimohan Ghosh.

Im Jahre 1906 leitete Einstein[1]) statistisch eine Formel für den quadratischen Mittelwert des von einem Brownschen Teilchen in einer bestimmten Zeit erreichten Abstandes ab, die nachher akzeptiert worden ist. Im demselben Jahre hat Smolukowski[2]) eine davon verschiedene Formel statistisch abgeleitet, die sich von der Einsteinschen Formel durch den Zahlenfaktor $\frac{64}{27}$ unterscheidet. Später haben Langevin[1]) und Einstein und Hopf[2]) die Einsteinsche Formel dynamisch abgeleitet. In dieser Arbeit leiten wir die Einsteinsche Formel für die Brownsche Bewegung her, durch die von einem der Verfasser entwickelte Theorie[3]) der Bewegung eines Teilchens unter periodisch wiederholten Impulsen.

1) Einstein, Ann. d. Phys. **19**, 371, 1906.
2) Smolukowski, Ann. d. Phys. **21**, 756, 1906.

1) Langevin, Compt. rend. **146**, 530, 1908.
2) Einstein u. Hopf, Ann. d. Phys. **33**, 1105, 1910.
3) K. C. Kar, Physik. Zeitschr. **24**, 63, 1923.

Die Schwingung eines gedämpften Teilchens ist gegeben durch die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \varepsilon^2 x = 0. \tag{1}$$

Wenn die Bewegung durch die Anfangsgeschwindigkeit hervorgerufen ist, ist ihre Lösung

$$x_t = \frac{u_{t'}}{p} e^{-b(t-t')} \sin p(t-t'), \tag{2}$$

wo $p^2 = \varepsilon^2 - b^2$ und $u_{t'}$ die zurzeit $t = t'$ verliehene Geschwindigkeit.

Für die auf die x-Richtung bezogene Brownsche Bewegung eines Teilchens gilt nun die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} = 0, \tag{3}$$

wo $2b = \frac{6\pi\xi a}{m}$ und ξ den Reibungskoeffizienten des Suspensionsmittels, m die Masse, a den Radius des Teilchens bedeuten.

Die Lösung von (3) ist offenbar

$$x_t = \frac{u_{t'}}{ib} e^{-b(t-t')} \sin ib\,(t-t') \tag{4}$$

oder

$$x_t = \frac{u_{t'}}{2b}(1 - e^{-2b(t-t')}) \tag{5}$$

und daher

$$\dot{x}_t = u_{t'} \cdot e^{-2b(t-t')}. \tag{6}$$

Wenn infolge der Zusammenstöße mit den umgebenden Molekülen ein periodischer Impuls auf ein Brownsches Teilchen wirkt, jedesmal im Zeitmoment $t = 0, \tau, 2\tau, \ldots n\tau$, so werden

$$x_{n\tau} = \frac{1}{2b}\left[u_n(1 - e^{-2bn\tau}) + u_{n-1}(1 - e^{-2b(n-1)\tau}) + \cdots + u_1(1 - e^{-2b\tau})\right] \tag{7}$$

und

$$\dot{x}_{n\tau} = u_n e^{-2bn\tau} + u_{n-1} e^{-2b(n-1)\tau} + \ldots + u_1 e^{-2b\tau} + u_0 \tag{8}$$

Nimmt man die Scharmittelwerte für alle Brownschen Teilchen, nämlich

$$\overline{u_n u_{n-1}} = \overline{u_n u_{n-2}} = \ldots = 0,$$

so hat man durch Quadrierung von Gleichung (7) und (8)

$$\overline{x^2_{n\tau}} = \frac{1}{4b^2}\left[\overline{u_n^2}(1 - e^{-2bn\tau})^2 + \overline{u_{n-1}^2}(1 - e^{-2b(n-1)\tau})^2 + \cdots + \overline{u_1^2}(1 - e^{-2b\tau})^2\right] \tag{9}$$

und

$$\overline{\dot{x}^2_{n\tau}} = \overline{u_n^2} e^{-4bn\tau} + \overline{u_{n-1}^2} \cdot e^{-4b(n-1)\tau} + \ldots + \overline{u_1^2} e^{-4b\tau} + \overline{u_0^2}. \tag{10}$$

Nehmen wir $\overline{u_n^2} = \overline{u_{n-1}^2} = \ldots = \overline{u_0^2}$, so haben wir

$$\overline{x^2_{n\tau}} = \frac{\overline{u_n^2}}{4b^2}\left[n - 2 \cdot \frac{1 - e^{-2b(n+1)\tau}}{1 - e^{-2b\tau}} + \frac{1 - e^{-4b(n+1)\tau}}{1 - e^{-4b\tau}} + 1\right] \tag{11}$$

und

$$\overline{\dot{x}^2_{n\tau}} = \overline{u_n^2} \cdot \frac{1 - e^{-4b(n+1)\tau}}{1 - e^{-4b\tau}}. \tag{12}$$

Nach (12) folgt daraus

$$m\overline{\dot{x}^2_{n\tau}} = KT = m\overline{u_n^2} \cdot \frac{1 - e^{-4b(n+1)\tau}}{1 - e^{-4b\tau}} \tag{13}$$

kombiniert man Gleichung (11) und (13) um $\overline{u_n^2}$ zu eliminieren, so hat man

$$\overline{x^2_{n\tau}} = \frac{KT}{4mb^2}\left[(n+1) \cdot \frac{1 - e^{-4b\tau}}{1 - e^{-4b(n+1)\tau}} - 2 \cdot \frac{1 + e^{-2b\tau}}{1 + e^{-2b(n+1)\tau}} + 1\right] \tag{14}$$

Wenn n unendlich groß ist, ist

$$\overline{x^2_{n\tau}} = \frac{KT}{4mb^2}\left[(n+1) \cdot (1 - e^{-4b\tau}) - 2\,(1 + e^{-2b\tau}) + 1\right]. \tag{15}$$

Nimmt man $4b\tau$ sehr klein gegen 1, so wird

$$\overline{x^2_{n\tau}} = \frac{KT}{4mb^2}(n+2) \cdot 4b\tau = \frac{KT}{mb} \cdot n\tau. \tag{16}$$

Setzen wir $2b = \frac{6\pi\xi a}{m}$ und $n\tau = t$, so erhalten wir die Einsteinsche Formel

$$\overline{x_t^2} = \frac{KT}{3\pi\xi a} \cdot t. \tag{17}$$

Kalkutta, Physikalisches Laboratorium, Presidency College, November 1927.

(Eingegangen 29. November 1927.)

Zur Feldtheorie von Elektrizität und Gravitation.

Von Leopold Infeld.

Die vorliegende Abhandlung versucht eine verallgemeinerte Weltgeometrie anzugeben, die zu einer neuen Theorie von Gravitation und Elektrizität führen soll. Sie stützt sich auf die Einsteinsche Idee der Einführung unsymmetrischer Komponenten der Parallelverschiebung[1]).

§ 1. Mathematische Vorbemerkungen[2]).

Es sei ein n-dimensionales Kontinuum gegeben mit den Komponenten der Parallelverschiebung Γ^l_{ik}. Die Symmetrie der Γ^l_{ik}, also auch die Gültigkeit des „Parallelogrammgesetzes" wird vorläufig nicht vorausgesetzt. Die Komponenten eines Vektors A^i erfahren bei Parallelverschiebung um dx^i, in einem gegebenen Koordinatensystem, eine Änderung gemäß der Relation:

$$dA^l = -\Gamma^l_{ik} A^i dx^k . \tag{1}$$

Wenn das Γ^l_{ik}-Feld gegeben ist, so können auf bekannte Weise die Ableitungen irgendwelcher Tensoren bestimmt werden. Dies legt den Gedanken nahe, die Komponenten der Parallelverschiebung durch gewisse Tensoren und ihre Ableitungen festzulegen.

Es sei ein beliebiger symmetrischer Tensor $\overline{g_{ik}}$ gegeben, dessen (in den Indizes i und k symmetrische) Ableitungen

$$\frac{\partial \overline{g_{ik}}}{\partial x^l} - \overline{g_{is}}\Gamma^s_{kl} - \overline{g_{sk}}\Gamma^s_{il} = \overline{Q_{ikl}} \tag{2}$$

sind. Diese $\frac{1}{2}\, n^2 (n+1)$ Gleichungen (2) genügen aber nicht, um aus ihnen die n^3 Komponenten Γ^l_{ik} zu bestimmen. Es lassen sich die noch fehlenden $\frac{1}{2}\, n^2 (n-1)$ Gleichungen aufstellen, wenn die Ableitungen $\overline{S_{ikl}}$ eines beliebigen (z. B. kovarianten) antisymmetrischen Tensors $\overline{\varphi_{ik}}$ bekannt sind. Es seien dies die Gleichungen:

$$\frac{\partial \overline{\varphi_{ik}}}{\partial x^l} - \overline{\varphi_{is}}\Gamma^s_{kl} - \overline{\varphi_{sk}}\Gamma^s_{il} = \overline{S_{ikl}} \tag{3}$$

in denen $\overline{S_{ikl}}$ in den Indizes i und k antisymmetrisch sind.

Es folgt aus den Gleichungen (2) und (3), daß die Kenntnis der kovarianten Ableitungen eines beliebigen symmetrischen und eines beliebigen antisymmetrischen Tensors zur Bestimmung des Γ^l_{ik}-Feldes führt.

Rein formal lassen sich die Gleichungen (2) und (3) in eine Gleichung

$$\frac{\partial \overline{\gamma_{ik}}}{\partial x^l} - \overline{\gamma_{is}}\Gamma^s_{kl} - \overline{\gamma_{sk}}\Gamma^s_{il} = \overline{P_{ikl}} \tag{4}$$

zusammenfassen, wo

$$\overline{\gamma_{ik}} = \overline{g_{ik}} + \overline{\varphi_{ik}} \tag{5}$$

und

$$\overline{P_{ikl}} = \overline{Q_{ikl}} + \overline{S_{ikl}} . \tag{6}$$

Umgekehrt: Aus den Gleichungen (4) können immer die Gleichungen (2) und (3) gewonnen werden.

Die durch (2) und (3) bestimmten Γ^l_{ik} sind keine Tensorkomponenten. Es können aber aus ihnen Tensoren abgeleitet werden. Die Transformationsgleichungen für Γ^l_{ik} bei einem Übergang zu einem gestrichenen System lauten:

$$\Gamma'^l_{ik} = \Gamma^m_{st}\frac{\partial x'^l}{\partial x^m}\frac{\partial x^s}{\partial x'^i}\frac{\partial x^t}{\partial x'^k} - \frac{\partial^2 x'^l}{\partial x^s \partial x^t}\frac{\partial x^s}{\partial x'^i}\frac{\partial x^t}{\partial x'^k} \tag{7}$$

Wenn wir also $f^{\cdot\cdot l}_{ik}$ durch die Gleichung

$$f^{\cdot\cdot l}_{ik} = \Gamma^l_{ik} - \Gamma^l_{ki} \tag{8}$$

definieren, so folgt aus (7), daß $f^{\cdot\cdot l}_{ik}$ ein in den Indizes i und k antisymmetrischer Tensor ist. Endlich bilden wir noch auf bekannte Weise den Riemannschen Tensor

$$R^m_{ikl} = -\frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^m_{sk}\Gamma^s_{il} + \frac{\partial \Gamma^m_{il}}{\partial x^k} - \Gamma^s_{ik}\Gamma^m_{sl} \tag{9}$$

und daraus durch Verjüngung:

$$R^l_{ikl} = R_{ik} = -\frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^l_{sk}\Gamma^s_{il} + \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} - \Gamma^s_{ik}\Gamma^l_{sl} \tag{10}$$

§ 2. Das Γ^l_{ik}-Feld unserer Weltgeometrie.

Um die Komponenten der Parallelverschiebung unserer vierdimensionalen Welt zu bestimmen, muß zunächst irgendeine Wahl eines symmetrischen und eines antisymmetrischen Tensors getroffen werden, sodann müssen die Ableitungen dieser Tensoren gegeben sein. Nun liegt der Gedanke nahe, den metrischen Fundamentaltensor g_{ik} als den symmetrischen Tensor, die elektromagnetische Feldstärke φ_{ik} als den antisymmetrischen Tensor zu wählen. Werden mit Q_{ikl} und S_{ikl} die Ableitungen dieser Tensoren bezeichnet, so nehmen die Gleichungen (2) und (3) die folgende Form an:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{is}\Gamma^s_{kl} - g_{sk}\Gamma^s_{il} = Q_{ikl} , \tag{11}$$

[1]) A. Einstein, Einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität. Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 1925, S. 414—419.

[2]) Vgl. J. A. Schouten, Der Ricci-Kalkül. Berlin, Julius Springer. 1925, II. L. P. Eisenhart, Non-Riemannian Geometry, Bd. 8 „American Math. Soc. Coll. Publ." 1927.

$$\frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x^l} - \varphi_{is}\Gamma^s_{il} - \varphi_{sk}\Gamma^s_{il} = S_{ikl}. \quad (12)$$

Um aus diesen $40 + 24 = 64$ Gleichungen die Komponenten Γ^l_{ik} berechnen zu können, müssen vorher die Komponenten Q_{ikl} und S_{ikl} angegeben werden.

Der Wert von Q_{ikl} hängt aufs engste mit der Änderung zusammen, die die Länge eines Maßstabes bei einer Verschiebung erfährt. Die Möglichkeit der Ausführung irgendwelcher Messungen stützt sich aber in der allgemeinen Relativitätstheorie auf das folgende Postulat[1]: „Zwei starre Stäbe, die einander gleich sind, bleiben immer einander gleich, d. h. wir können jedem starren Stabe eine Zahl zuordnen, die seine Länge ausdrückt". Aus diesem Postulate geht hervor, daß auch hier, wie in der Riemannschen Geometrie

$$Q_{ikl} = 0 \quad (13)$$

gesetzt werden muß.

Für S_{ikl} wäre aber der analoge Ansatz $S^{ikl} = 0$ unmöglich, da $S^{\cdot\cdot k}_{ik}$ also auch der Stromvektor immer gleich Null sein müßte, was im allgemeinen nicht vorausgesetzt werden soll. Die in § 1 entwickelte Geometrie lieferte uns den Tensor dritter Stufe $J^{\cdot\cdot l}_{ik}$, der wie $S^{\cdot\cdot l}_{ik}$ in den Indizes i und k antisymmetrisch ist. Es soll also für den Tensor $S^{\cdot\cdot l}_{ik}$ der möglichst einfache Ansatz gemacht werden:

$$S^{\cdot\cdot l}_{ik} = J^{\cdot\cdot l}_{ik} = \Gamma^l_{ik} - \Gamma^l_{ki}. \quad (14)$$

Man erhält dann zur Bestimmung der Γ^l_{ik} folgende 64 Gleichungen:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{is}\Gamma^s_{kl} - g_{sk}\Gamma^s_{il} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x^l} - \varphi_{is}\Gamma^s_{kl} - \varphi_{sk}\Gamma^s_{il} = g_{sl}J^{\cdot\cdot s}_{ik} = J_{ikl}. \quad (16)$$

§ 3. Folgerungen.

1. Im speziellen Falle, wenn kein elektromagnetisches Feld vorhanden ist, erhält man aus (16):

$$J^{\cdot\cdot l}_{ik} = 0; \Gamma^l_{ik} - \Gamma^l_{ki} = 0. \quad (17)$$

Aus (15) und (17) folgt, daß bei Abwesenheit des elektromagnetischen Feldes der Fall der Riemannschen Geometrie mit symmetrischen Komponenten der Parallelverschiebung vorliegt.

2. Aus den Gleichungen (16) geht die geometrische Interpretation des Stromvektors J_i hervor. Man erhält nämlich durch Verjüngung von $J^{\cdot\cdot l}_{ik}$ in den Indizes k und l:

$$J_i = J^{\cdot\cdot k}_{ik} = \frac{\partial \varphi^k_i}{\partial x^k} + \varphi^s_i\Gamma^k_{sk} - \varphi^k_s\Gamma^s_{ik}. \quad (18)$$

Die Maxwellschen Gleichungen verlieren in unserer Weltgeometrie ihre einfache Form. Die Gleichung (18) vereinfacht sich, wenn wir die Rechnung nur in erster Annäherung ausführen, d. h. wenn wir voraussetzen, daß die Abweichungen der g_{ik} von den Werten, die dieser Tensor in der speziellen Relativitätstheorie annimmt, und daß weiter die Größen $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\Gamma^l_{ik}$, $J^{\cdot\cdot l}_{ik}\varphi_{ik}$ sehr klein sind, so daß ihre höheren Potenzen vernachlässigt werden können. Man erhält dann aus (18) die Maxwellschen Gleichungen in der einfachen Form:

$$\frac{\partial \varphi^k_i}{\partial x^k} = J^{\cdot\cdot k}_{ik} = J_i. \quad (19)$$

3. Aus dem Tensor J_{ikl} kann ein antisymmetrischer Tensor dritter Stufe T_{ikl} auf folgende Weise gebildet werden:

$$T_{ikl} = J_{ikl} + J_{kli} + J_{lik}. \quad (20)$$

Nach Ausrechnung erhält man:

$$T_{ikl} = \frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial \varphi_{li}}{\partial x^k} + \varphi_{sl}J^{\cdot\cdot s}_{ik} + \varphi_{si}J^{\cdot\cdot s}_{kl} + \varphi_{sk}J^{\cdot\cdot s}_{li}, \quad (21)$$

oder in der oben beschriebenen Annäherung:

$$T_{ikl} = \frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial \varphi_{li}}{\partial x^k}. \quad (22)$$

§ 4. Die Differentialgleichungen für g_{ik} und φ_{ik}.

Aus den Gleichungen (15) und (16) folgen die Γ^l_{ik} Werte für gegebene g_{ik} und φ_{ik}. Es sollen jetzt die Differentialgleichungen angegeben werden, die zur Bestimmung der Tensoren g_{ik} und φ_{ik} in materiefreien Räumen führen.

Im Anschluß an die Riemann-Einsteinsche Weltgeometrie soll die Aufstellung eines möglichst einfachen Ansatzes versucht werden, und zwar:

$$R_{ik} = 0. \quad (23)$$

Zwecks Berechnung von (23) wollen wir zunächst die Γ^l_{ik} aus (15) bestimmen. Man erhält:

$$g_{ls}\Gamma^s_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\right) + \frac{1}{2}(g_{ks}J^{\cdot\cdot s}_{il} + g_{is}J^{\cdot\cdot s}_{kl} + g_{ls}J^{\cdot\cdot s}_{ik}) \quad (24)$$

$$= [ik, l] + \frac{1}{2}(J_{ilk} + J_{kli} + J_{ikl})$$

1) L. Infeld, Sur la mésure du temps et de l'espace dans la physique classique et dans la théorie de la relativité (II). C. R. Soc. Polon. de Phys. 3; 2.

und daraus:

$$\Gamma^l_{ik} = \{ik,l\} + \frac{1}{2}\left(J^l_{i\cdot k} + J^l_{k\cdot i} + J_{ik}{}^{\cdot l}\right), \quad (25)$$

oder unter Berücksichtigung von (16) in der oben beschriebenen Annäherung:

$$\Gamma^l_{ik} = \{ik,l\} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x^s}\delta^{sl} + \frac{\partial \varphi_k{}^{\cdot l}}{\partial x^i} + \frac{\partial \varphi_i{}^{\cdot l}}{\partial x^k}\right). \quad (26)$$

δ^{ik} ist gleich den Werten, die g^{ik} in der speziellen Relativitätstheorie annimmt.

Die Spaltung der R_{ik} in den symmetrischen und antisymmetrischen Teil unter Vernachlässigung der Glieder von höherer Ordnung ergibt:

$$R_{ik} + R_{ki} = -\frac{\partial\left(\Gamma^s_{ik} + \Gamma^s_{ki}\right)}{\partial x^s} + \frac{\partial \Gamma^s_{is}}{\partial x^k} + \frac{\partial \Gamma^s_{ks}}{\partial x^i} = 0 \quad (27)$$

$$R_{ik} - R_{ki} = -\frac{\partial\left(\Gamma^s_{ik} - \Gamma^s_{ki}\right)}{\partial x^s} + \frac{\partial \Gamma^s_{is}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^s_{ks}}{\partial x^i} = 0. \quad (28)$$

Indem man in (27) die Werte Γ^l_{ik} aus (26) einsetzt und die Relation

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\{is,s\} = \frac{\partial}{\partial x^s}\{ks,s\} \quad (29)$$

berücksichtigt, erhält man die Gleichung:

$$\frac{1}{2}(R_{ik} + R_{ki}) = -\frac{\partial}{\partial x^s}\{ik,s\} + \frac{\partial}{\partial x^k}\{is,s\} = 0 \quad (30)$$

die mit der entsprechenden Gleichung der Einsteinschen Gravitationstheorie iden isch ist.

Aus (28) folgt nach Berechnung

$$\frac{1}{2}(R_{ik} - R_{ki}) = \frac{1}{2}\left(\delta^{ls}\frac{\partial^2 \varphi_{ki}}{\partial x^l \partial x^s} + \frac{\partial J_i}{\partial x^k} - \frac{\partial J_k}{\partial x^i}\right) = 0. \quad (31)$$

Aus Gleichung (30) und (31) geht hervor, daß das Gravitationsfeld und das elektromagnetische Feld (in erster Approximation) voneinander unabhängig sind, da die Gleichungen (30) die φ_{ik} und die Gleichungen (31) die g_{ik} nicht enthalten.

Die Gleichungen (31) bilden eine Folgerung der Maxwellschen Gleichungen. In der Tat, ersieht man gleich, daß aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial \varphi_i{}^{\cdot k}}{\partial x^k} = J_i \quad (19)$$

$$\frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial \varphi_{li}}{\partial x^k} = 0 \quad (32)$$

die Gleichungen (31) erhalten werden können. Aus den erhaltenen Gleichungen (19) und (31) läßt sich aber auf die Gültigkeit von (32) nicht schließen. Das zweite Maxwellsche Gleichungssystem kann in den Symbolen unserer Weltgeometrie (vgl. § 3) durch die Gleichung

$$T_{ikl} = 0 \quad (33)$$

ausgedrückt werden. Wird also unsere Weltgeometrie durch die Gleichungen (33) beschränkt, so erhält man nicht nur eine Folgerung des zweiten Maxwellschen Gleichungssystems, sondern das zweite Maxwellsche Gleichungssystem selbst.

Den Inhalt der Theorie bilden also die 80 Gleichungen (15), (16) und (23), die zur Bestimmung der 80 Unbekannten führen sollen.

Man gelangt zu einem System von 84 Gleichungen (die das Feld überbestimmen), wenn auch die Erfüllung von (33) verlangt wird.

Zusammenfassung.

Die Theorie, deren vorläufige Skizze hier entwickelt wurde, stützt sich auf folgende Voraussetzungen:

1. Die Komponenten der Parallelverschiebung sind im allgemeinen Falle nicht symmetrisch.

2. Die Länge eines Stabes wird durch den Transport nicht geändert.

3. Die Ableitungen $(\varphi_{ik})_l$ der elektromagnetischen Feldstärke sind:

$$(\varphi_{ik}) = g_{sl}\left(\Gamma^s_{ik} - \Gamma^s_{ki}\right) = J_{ikl},$$

$J_{ik}{}^{\cdot k} = J_i$ stellt uns dann den Stromvektor dar.

4. Im materiefreien Felde gilt die Gleichung:

$$R_{ik} = 0.$$

Aus diesen Voraussetzungen folgen die Einsteinschen Gravitationsgleichungen und die Maxwellschen Gleichungen in erster Approximation.

Seminar für theoretische Mechanik an der Universität Warschau.

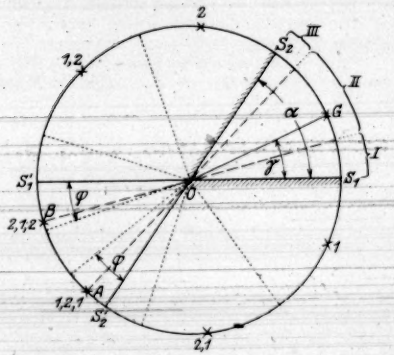
(Eingegangen 20. Januar 1928.)

Die Bilder im Winkelspiegel.

Von H. Maurer.

Herr T. Oryng kündigt in der Physik. Zeitschr. **29**, 41, 1928 eine ausführliche Arbeit über die Anzahl der Bilder im Winkelspiegel an. Es ist anzunehmen, daß diese Arbeit inhaltlich einen Teil meiner Arbeit „Über die Theorie des Winkelspiegels" darstellen wird, die ich im „Archiv der Mathematik und Physik" 2. Reihe Teil IX, 1890, S. 1—17 veröffentlicht habe. Ich sage einen Teil, da Herr Oryng nur von der Anzahl entstehender Bilder eines Lichtpunktes im Winkelspiegelraum spricht, während ich außerdem die Frage behandelt habe, wieviele von diesen geometrisch entstehenden Bildern man von jedem Augpunkte aus sehen kann. Denn nur in einem Spezialfall kann man alle geometrisch entstehenden Bilder

von jedem Ort im Winkelspiegelraum sehen; und in anderen Fällen gibt es überhaupt keinen Augpunkt, von dem aus alle entstehenden Bilder erblickt werden können. Ich möchte deshalb die Ergebnisse jener alten, vergessenen Arbeit hier kurz zusammenstellen.



Es sei (s. Figur) $S_1 O S_2 = \alpha$ der Winkelraum vor beiden Spiegeln. Der zu spiegelnde Punkt G habe vom Spiegel S_1 den Winkelabstand γ; und es sei $\gamma \leqq \alpha - \gamma$.

Die zuletzt an S_1 gespiegelten Bilder haben vor S_1 aus in den Raum hinter S_1 hinein die Winkelabstände γ, $2\alpha - \gamma$, $2\alpha + \gamma$, $4\alpha - \gamma$, $4\alpha + \gamma$ usw., die zuletzt von S_2 gespiegelten von S_2 in den Raum hinter S_2 hinein die Winkelabstände $\alpha - \gamma$, $\alpha + \gamma$, $3\alpha - \gamma$, $3\alpha + \gamma$ usw. In den Raum hinter beiden Spiegeln $S_1' O S_2'$ — er heiße der tote Raum — fallen stets nur 2 Bilder A und B. Die Geraden AO und BO, über O verlängert, teilen den Raum $S_1 O S_2$ in 3 Sektoren I II III, in denen ein Auge verschieden viele Bilder $s_1\, s_2\, s_3$ sieht.

Die Anzahl n der geometrisch entstehenden Bilder hängt von den Winkeln γ und α in der Art ab, daß man zu α zwei Größen p und φ zu bestimmen hat aus der Gleichung $180^0 = p\alpha + \varphi$, wo p eine ganze Zahl und $0 \leqq \varphi < \alpha$ ist.

Die folgende Tabelle gibt für die zu unterscheidenden Beziehungen zwischen φ und γ, die von p abhängigen Anzahlen n der entstehenden Bilder, und die Anzahlen $s_1\, s_2\, s_3$ der in den drei Sektoren I II III sichtbaren Bilder, wobei für jeden Fall ein Beispiel angegeben ist. Die Tabelle ist im allgemeinen ohne weiteres verständlich; nur die Sonderfälle bedürfen einer gewissen Erläuterung.

Im Fall $\varphi = 0$ ist α ein geradzahliger Teil des Kreisumfangs. Dann decken sich die beiden in den toten Raum fallenden Bilder Punkt für Punkt, wo immer der gespiegelte Gegenstand liegt. Der mittlere Sektor II verschwindet. Dieser Fall ist der einzige, in dem man alle entstehenden Bilder von jedem Ort des Spiegelwinkelraumes aus sieht.

Die in den anderen Sonderfällen erwähnten halben Bilder bedeuten, daß ein Bild genau auf einen Rand des toten Sektors fällt, also ein Randsektor I bzw. III verschwindet. Denkt man sich in solchem Fall ein zu spiegelndes Körperelementchen, so entsteht von ihm im betreffenden Rand des toten Raumes zunächst ein ganzes Bild,

Anzahl der Bilder beim Spiegelwinkel α und Lagenwinkel γ.

$180 = p\alpha + \varphi$, p = ganze Zahl, $0 \leqq \varphi < \alpha$; $\gamma \leqq \alpha - \gamma$

Beziehung zwischen φ, γ und $(\alpha - \gamma)$	Gesamtzahl n der Bilder	Anzahl sichtbarer Bilder im Sektor I	Sektor II	Sektor III	Beispiele α_0	φ_0	γ_0	p	n
Grenzfall $\varphi = 0$	$2p - 1$ [1]	$2p - 1$	Sektor $= 0$	$2p - 1$	60	0	beliebig	3	5
$0 < \varphi < \gamma$	$2p$	$2p - 1$	$2p$	$2p - 1$	85	10	25	2	4
Sonderfall $\varphi = \gamma$	$2p + 1/2$ $\begin{cases} p \text{ gerade} \\ p \text{ ungerade} \end{cases}$	Sektor $= 0$ $2p + 1/2 - 1$	$2p + 1/2$ $2p + 1/2$	$2p + 1/2 - 1$ Sektor $= 0$	75 55	30 15	30 15	2 3	$4^1/_2$ $6^1/_2$
$\gamma < \varphi < \alpha - \gamma$	$2p + 1$ $\begin{cases} p \text{ gerade} \\ p \text{ ungerade} \end{cases}$	$2p + 1$ $2p - 1$	$2p$ $2p$	$2p - 1$ $2p + 1$	40 32	20 20	5 10	4 5	9 11
Sonderfall $\gamma < \varphi = \alpha - \gamma$	$2p + 1 + 1/2$ $\begin{cases} p \text{ gerade} \\ p \text{ ungerade} \end{cases}$	$2p + 1 + 1/2$ Sektor $= 0$	$2p + 1/2$ $2p + 1/2$	Sektor $= 0$ $2p + 1 + 1/2$	65 50	50 30	15 20	2 3	$5^1/_2$ $7^1/_2$
Sonderfall $\varphi = \gamma = \alpha - \gamma = \frac{\alpha}{2}$	$2p + 2/2$	Sektor $= 0$	$2p + 2/2$	Sektor $= 0$	72	36	36	2	$4^2/_2$
$\varphi > \alpha - \gamma > \gamma$	$2p + 2$	$2p + 1$	$2p$	$2p + 1$	100	80	40	1	4

1) Eigentlich $2p$; aber 2 Bilder fallen zusammen.

dessen aus dem toten Raum herausragender Teil (volkstümlich gesagt: herausragende Hälfte) noch einmal gespiegelt wird. Und da die beiden an gleicher Stelle des Randes im toten Raum entstehenden Halbbilder entgegengesetzter Teile des Raumelements abbilden, ist das letzte Halbbild besonders zu zählen. Die gebrochene Zahl der Bilder gilt für einen kleinen in Umgebung des betreffenden γ-Wertes ausgedehnten Körper tatsächlich, da für seine Hälfte zwei verschiedene Bilderanzahlen gelten. Das Zusammenfallen gleicher Bilder an demselben Ort gilt in diesen Sonderfällen nicht wie im Falle $\varphi = 0$ für alle Werte von γ, sondern nur für einen scharfen γ-Wert. Der Fall $\varphi = \frac{\alpha}{2}$ (α ein ungeradzahliger Teil des Vollkreises) bietet deshalb keinerlei Besonderheit von dem Punkte abgesehen, für den gleichzeitig $\gamma = \frac{\alpha}{2}$ ist.

Die nachstehende Formel gibt die Anzahl n der entstehenden Bilder für alle Fälle richtig an: $n = 2p + {}^1/_2\{2 - [\gamma - \varphi] - [\alpha - \gamma - \varphi]\} + [\varphi] - 1$, wo die eckigen Klammern $+1$, ± 0 bzw. -1 bedeuten sollen, je nachdem ihr Inhalt positiv, Null, bzw. negativ ist.

Allgemein — auch für die Sonderfälle, wenn man in ihnen die immer positiv in der Tabelle einzuschreibenden halben Bilder wegläßt (die nur für einen Punkt einen gewissen mathematischen Sinn haben) — gelten die folgenden Sätze:

Teilt man den Winkelraum vor beiden Spiegeln in derselben Weise in drei Sektoren, wie der Raum hinter beiden Spiegeln durch die zwei in ihn fallenden Bilder des Gegenstandes geteilt wird, so erblickt ein Auge vom mittleren Sektor aus stets eine gerade Anzahl von Bildern, von jedem Randsektor aus stets eine ungerade Anzahl von Bildern. Die Lage des Gegenstandes und die Größe des Spiegelwinkels ist gleichgültig; sie bestimmen nur die Größe der Sektoren.

Die Anzahl s_2 der vom mittleren Sektor des Spiegelwinkels α aus sichtbaren Bilder, hängt nicht vom Lagenwinkel γ des Gegenstandes, sondern nur vom Spiegelwinkel α ab. Sie ist stets $s_2 = 2p$, wo die ganze Zahl p der Gleichung genügt:

$$180^0 = \alpha p + \varphi \text{ und } 0 \leq \varphi < \alpha \text{ ist.}$$

In den Randsektoren sieht das Auge je nach Lage des Gegenstandes $(2p - 1)$ oder $(2p + 1)$ Bilder. Die Gesamtzahl n der geometrisch entstehenden Bilder steigt von $2p$ bis $(2p + 2)$ an, während φ im Verhältnis zu γ und $(\alpha - \gamma)$ anwächst. Im Fall $n = 2p + 2$, der für φ größer als γ und $(\alpha - \gamma)$ eintritt, gibt es keinen Ort, von dem aus alle entstehenden Bilder zugleich sichtbar sind; man muß dann, um sie alle zu sehen, den Augpunkt wandern lassen.

Im Sonderfall $\varphi = 0$ fallen zwei Bilder an denselben Ort, so daß ein Auge von überall nur $(2p - 1)$ verschieden liegende Bilder sieht.

Berlin, Januar 1928.

(Eingegangen 27. Januar 1928.)

Bemerkung zu der Arbeit der Herren R. Jaeger u. A. Kußmann über Gleichstromverstärkung, ihre Anwendung zu Meßzwecken und ihre Grenzen.

Von O. Feußner.

Ich bekomme leider erst jetzt Kenntnis von einem Aufsatz der obengenannten Herren in Nr. 19 der „Physikalischen Zeitschrift 1927", und möchte nur kurz darauf hinweisen, daß ich in meiner Doktor-Dissertation aus dem Jahre 1920 das grundlegende Prinzip der Gleichstrom-Verstärkung mit Hilfe von Eingitter-Elektronenröhren niedergelegt habe. Die Veröffentlichung konnte allerdings erst mit Rücksicht auf die damaligen Zeitverhältnisse im Jahre 1923 in der Zeitschrift für „Fernmeldetechnik" Heft Nr. 7 und 8 erfolgen. Es scheint, als ob der Aufmerksamkeit der Herren Jaeger und Kußmann diese meine Veröffentlichung entgangen ist, da sie weder in ihrer Arbeit in der Physikalischen Zeitschrift, noch in einer früheren Arbeit (erschienen in den Wissenschaftlichen Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern) darauf Bezug nehmen.

Erwiderung auf vorstehende Bemerkung.

Von R. Jaeger und A. Kußmann.

Die in der obigen Zuschrift benannte Arbeit haben wir in unserer Zusammenstellung nicht erwähnt, da sie sich mit Wechselstrommessungen an Elektroneneingitterröhren befaßt und keinerlei Hinweise auf das hier behandelte Problem enthält. Allerdings gibt Verf. eine Rückleitungsschaltung mit zwei Röhren und Ohmschen Widerständen an, mit der man die Steilheit der Anodenstromcharakteristik theoretisch beliebig erhöhen kann. Wie wir in unserem Text S. 648 erwähnt haben, sind derartige Schaltungen schon früher von verschiedenen Autoren in der Literatur der drahtlosen Telegraphie mitgeteilt worden (A. Blondel, C. R. **169**, 676, 1919; M. Latour, Rad. Rev. **1**, 471, 1920; L. B. Turner [Callirotron], Rad. Rev. **1**, 317, 469, 1920; Scott-Taggart (Biotron), Rad. Rev. **2**, 601, 1921). Wir geben Herrn Feußner zu, daß seine Arbeit

in diesem Zusammenhang in die Zitate der Arbeit von R. Jaeger und H. Scheffers (Wissenschaftl. Veröffentl. a. d. Siem.-Konz. **4**, 233, 1925) hätte aufgenommen werden müssen.

Schlußwort.

Von O. Feußner.

An und für sich halte ich die ganze Frage nicht für so wichtig, um daran eine Erörterung zu knüpfen. Nur die meinem Gefühl nach etwas sehr stark betonte Hervorhebung der eigenen Leistungen ließ mir den Hinweis auf schon früher erfolgte Untersuchungen gerechtfertigt erscheinen. Im einzelnen sei noch bemerkt: In der Veröffentlichung in der „Fernmeldetechnik" sind zwar nur die Wechselstrommessungen aufgeführt, es ist aber ausdrücklich erwähnt, daß die Einrichtung frequenzunabhängig sei, in der Dissertation selber sind Angaben bezüglich der Gleichstromverwendung ausführlich enthalten. Ich glaubte im übrigen, daß die obige Bemerkung für Fachleute genügte, um den Verwendungsbereich abzugrenzen. Da meine Untersuchungen schon im Frühjahr 1920 abgeschlossen wurden, so liegen übrigens die von Herren Jaeger und Kußmann zitierten ältesten Arbeiten gleichzeitig mit meinen Untersuchungen, nicht früher.

BESPRECHUNGEN.

F. R. Moulton, Einführung in die Himmelsmechanik. 2., durchgesehene Auflage, autorisierte deutsche Ausgabe von Dr. W. Fender. 8°. 412 S. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1927. Preis M. 20.—.

Das bereits in zweiter Auflage erschienene Buch von Moulton hat nunmehr auch eine Übersetzung durch W. Fender in Berlin erfahren. Das M.sche Buch kommt, auch in Deutschland, insofern einem Bedürfnis entgegen, als tatsächlich keine Einführungen in die Himmelsmechanik vorhanden sind, während andererseits ein derartiges einführendes Werk für den Anfänger sehr erwünscht ist. Wohl ist das große Tisserandsche Werk zur Mechanik des Himmels immer noch das beste Buch zum Studium dieses Gebietes, aber für den Anfänger wenig geeignet. Wenn auch jeder Wissenschaftler der englischen Sprache unbedingt mächtig sein muß, so bietet eine gute Übersetzung doch besondere Vorteile und Annehmlichkeiten, indem vor allem durch etwaige sprachliche Zweifel entstehende sachliche Bedenken des Lesers behoben werden und deshalb ein klares, schnelleres Studium des Werkes möglich ist.

Die Vorzüge des M.schen Buches sind verschiedener Art. Bei aller Klarheit und Einfachheit der Darstellung wurde der Weg auch zu den schwierigeren Teilen der Himmelsmechanik freigelegt und angeregt, indem auch das Dreikörper-Problem in einem Umfange von mehr als einem Drittel des ganzen Buches behandelt wird, soweit es bei einer Einführung mittels geometrischer und analytischer Behandlungsweise der Theorie der Mond- und Planetenbewegung möglich ist. Zuerst werden dabei die strengen Ergebnisse des asteroidischen Falles des Dreikörper-Problems, speziell auch der Lagrangeschen Lösungen abgeleitet. Alle diese Untersuchungen sind zwar nicht so formuliert, daß eine unmittelbare numerische Anwendung möglich ist, was aber auch nicht der Zweck einer Einführung sein kann. Dagegen sind zur theoretischen Übung in allen Kapiteln zahlreiche Aufgaben gestellt, die eine Vertiefung des Verständnisses herbeizuführen geeignet sind. Eine wertvolle Verbindung aller Kapitel bilden die am Schlusse jeden Kapitels gegebenen geschichtlichen Übersichten und Literaturangaben.

Was für die Darstellung des Dreikörper-Problems gilt, gilt auch für alle anderen Kapitel, die das Potential und die Anziehung von Körpern von allgemein ellipsoidischer Figur behandeln und bis zu Ivorys Methode vordringen. In einem weiteren Kapitel über das Zweikörperproblem werden alle Vorbereitungen für die Anwendung auf die Bahnbestimmung der Planeten nach Laplace und Gauß getroffen. Die Laplacesche Methode wäre besser unterblieben, da sie nicht angewendet wird und andererseits die neueren Methoden der Bahnbestimmung von der Wurzel der Laplaceschen Methode sehr weit entfernt sind oder überhaupt keine Beziehungen zu ihr haben.

Diesen Hauptkapiteln geht in 3 einleitenden Kapiteln eine Darlegung der Hauptergebnisse der analytischen Mechanik vorher, ergänzt durch zahlreiche Aufgaben und geschichtliche Übersichten. Mit Rücksicht auf die spätere Behandlung des Zwei- und Dreikörper-Problems wird speziell die Theorie der Zentralbewegung eingehend behandelt.

Wer nicht sofort die Kenntnisse mitbringt, die zum Studium der Tisserandschen Mechanik des Himmels notwendig sind, wird in dem Moultonschen Buche ein gutes und überall anregendes Werk zur Einführung in das weite Feld der Mechanik des Himmels besitzen, zumal nach der durch die sorgfältige Fendersche Übersetzung gegebenen Erleichterung zum Studium des Buches. Wilkens.

H. Meldau, Technische Navigation und Meteorologie. (Nachtrag zur 10. Aufl. von Breusing-Meldau, Steuermannskunst.) Unter Mitwirkung von F. A. Fischer, J. Georgi und H. Maurer herausgegeben von H. Meldau. 176 S. Mit 89 Abb. Bremen, G. Winter. 1927. Geb. M. 6.—.

Den Leser dieser Zeitschrift dürfte vornehmlich der 5. Abschnitt des Buches interessieren, das Kapitel über Meteorologie, das bis auf einen vom Herausgeber bearbeiteten Abschnitt über tropische Orkane von Georgi herrührt. Obwohl es vorwiegend für die praktischen Bedürfnisse des Seefahrers geschrieben ist — es werden übrigens auch die Probleme der großen Luftfahrt behandelt, — so sind durchaus die physikalischen Grundlagen der meteorologischen Erscheinungen klar und prägnant zum Ausdruck gebracht. Manche

Abschnitte, wie die über Niederschlags- und Wolkenformen, über die optischen und besonders über die elektrischen Erscheinungen in der Atmosphäre sind zu knapp behandelt. Sehr gut sind bei aller Kürze die Darstellung der Luftströmungen, der Bjerknesschen Zyklonentheorie, der meteorologischen Instrumente und ihrer Benutzung. Acht Tafeln sowie die Beigabe der von der Deutschen Seewarte herausgegebenen Wolkentafeln vervollständigen neben 50 durchweg gut ausgewählten und ausgeführten Figuren die Ausstattung.

Besonders ansprechend ist nach Ansicht des Referenten die sehr anregende und klare Darstellungsweise; er möchte die Ansicht aussprechen, daß nach Beseitigung der vorstehend erwähnten kleinen Mängel eine Sonderausgabe dieses Abschnittes ein vorzügliches Einführungsbuch in die Meteorologie auch für Nichtseefahrer darstellen würde.

Der Inhalt der übrigen Abschnitte, die den Kreiselkompaß, das Anschütz-Selbststeuer, den Kursschreiber, die modernen Lotmittel und den Bordfunkpeiler behandeln, liegt dem Interessengebiet des Physikers etwas fern, da dem Zwecke des Buches entsprechend das Hauptgewicht auf die technische Ausführung und die nautische Verwendung der Apparate gelegt werden mußte. Zahn.

E. Mosch, Lehrbuch der Physik. Oberstufe, 4. Heft. 23×16. X u. 229 S. Mit 199 Abb. Leipzig, G. Freytag. 1927. Geb. M. 4.80.

Mit dem vorliegenden Band findet das an dieser Stelle schon teilweise besprochene Unterrichtswerk seinen Abschluß. Um gleich seine wichtigsten Vorzüge zu nennen: Es verwendet grundsätzlich das praktische Maßsystem, auch bei magnetischen Messungen, was besonders klärend wirken dürfte. Die Stoffverteilung und die Auswahl der Aufgaben verrät eine wirklichkeitsnahe und gegenwartsfrohe Einstellung des Verfassers. Technische und wissenschaftliche Gesichtspunkte kommen beide zu ihrem Recht.

Das Buch gliedert sich in drei Hauptabschnitte. Der erste (83 S.) behandelt nach einem sehr kurzen Einleitungskapitel über Elektrostatik und galvanische Elemente die Erscheinungen des Galvanismus und der Elektrodynamik, der zweite (44 S.) berichtet über „Ion und Elektron", in typischer Weise das Ineinanderwirken von theoretischer und experimenteller Forschung widerspiegelnd, der dritte (43 S.) behandelt elektrisches Feld, elektrische Schwingungen und Wellen. Es folgen Aufgaben (17 S.), ein geschichtlicher Überblick (22 S.) und eine Anzahl Tabellen (12 S.).

Diese Inhaltsangabe zeigt deutlich, wie sehr der Verfasser bemüht ist, schnell zu den modernen Interessengebieten vorzudringen und man kann mit seiner Darstellung im wesentlichen völlig einverstanden sein. Doch müssen einige Bedenken geäußert werden. Vor allem scheint mir die Grundlegung der Spannungsmessung ungünstig. Ihre Definition mit Hilfe des Arbeitsbegriffs (S. 15—17) ist logisch einwandfrei, aber reichlich abstrakt und vor allem unpraktisch. Es ist wohl besser vom Normalelement auszugehen und die Spannungsaddition anschaulich durch Reihenschaltung von Elementen zu definieren, während die Auffassung, als sei der Ausschlag eines Elektrometers ohne Hilfsladung proportional zur Spannung (S. 10), bestimmt gerade bei kleinen Ausschlägen irrig ist. Andererseits wird das Joulesche Gesetz, experimentell abgeleitet, nachträglich immer noch den Zusammenhang zwischen Spannung, Elektrizitätsmenge und Energie aufdecken. Ferner hat der Verfasser die Frage der Benennungen nicht konsequent behandelt. Von den zwei Möglichkeiten, entweder nur mit Maßzahlen zu rechnen, oder, was aus theoretischen und praktischen Gründen sicher besser ist, alle physikalischen Größen als benannte Zahlen aufzufassen und mit den Benennungen symbolisch zu rechnen, zieht Mosch die letzte vor. Dann dürfte man aber nur Zahlen, nicht allgemeine Ausdrücke, wie $\frac{E}{I}$ usw. mit Benennungen versehen. (Vgl. etwa S. 18 Z. 2 von unten u. S. 27, Z. 3 von unten.)

Dann noch einiges weniger Wichtige: Bei dem Versuch auf S. 53 muß unbedingt angegeben werden, daß der Galvanometerwiderstand groß sei gegen den des Drahtes. Daß B stets proportional H sei (S. 55), kann doch für ferromagnetische Stoffe nicht mitbehauptet werden. S. 148 Z. 3 muß es heißen $\frac{t}{\sqrt{LC}}$ statt $t \cdot \sqrt{LC}$.

Immerhin fallen diese Ausstellungen gegenüber den eingangs erwähnten Vorzügen nicht erheblich ins Gewicht, so daß man das Buch mit Anerkennung begrüßen kann. E. Nies.

J. Frenkel, Lehrbuch der Elektrodynamik. I. Band. Allgemeine Mechanik der Elektrizität. Gr. 8°. X u. 365 S. Mit 39 Abbildungen. Berlin, J. Springer, 1926. M. 28.50, geb. M. 29.70.

„Auf leichte Verständlichkeit habe ich überall den größten Wert gelegt", zitiert Konrad Knopp in einem jüngst erschienenen Hefte der Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung gelegentlich seines Nachrufs auf H. v. Mangoldt dessen Vorwort zu seinem bekannten Lehrbuch. Und er fährt fort: „Wie wenige Autoren dürfen das heute von sich sagen! Überblickt man die Lehrbuchliteratur der letzten zwanzig oder fünfundzwanzig Jahre — und ich meine nur die, die vor ein strenges Forum der Wissenschaft sich wagen dürfen —, so möchte man fast meinen, daß ihre Autoren sich in steigendem Maße das entgegengesetzte Ziel gesetzt hätten, sich jedenfalls vor allem bemüht hätten, auf einem Minimum von Raum ein Maximum von Gelehrsamkeit zu entfalten." So gewiß sich das Frenkelsche „Lehrbuch" vor ein strenges Forum der Wissenschaft wagen darf, es verdient wohl schon aus dem letztgenannten Grunde kaum den Namen eines Lehrbuchs. Hinzuzufügen wäre, daß man zwar — vielleicht — die Zeit für gekommen halten mag, die Elektrodynamik rein systematisch darzustellen und von jeder historischen Entwicklung abzusehen, etwa Abraham, Larmor, Planck, Poynting in einzeiligen Anmerkungen auftreten zu lassen — nicht befreunden sollte sich der Leser eines Lehrbuchs mit der völligen Abkehr vom mütterlichen Boden des Experiments. Die Kluft zwischen experimenteller und theoretischer oder gar mathematischer Physik wird von der andern Seite — man denke an Kaufmanns, an Mies, an Pohls Lehrbücher des Gebiets — in so dankenswerter und erfolgreicher Weise zu überbrücken gesucht, daß die Theoretiker das Ihre tun sollten. Bei Frenkel erscheint sie tiefer als je. Von der Goetheschen Mahnung „Dich im Unendlichen zu finden, mußt unterscheiden und dann verbinden" bleibt nur das Unterscheiden übrig.

Hat man sich jedoch zu dieser Entsagung durchgerungen, so bewundert man von der knappen und

sehr sorgfältig geformten Bereitstellung der Hilfsmittel der Vektoren- und Tensorenrechnung in der Einleitung an immer wieder das große formale Geschick im ganzen neben vielen geistreichen Wendungen im einzelnen. So geht der erste Abschnitt, der die von der Zeit unabhängigen elektromagnetischen Wirkungen behandelt, in seinem ersten Kapitel „Elektrostatische Wirkungen und Energieprinzip" nicht von den Einzelladungen, sondern von Dipolen aus, während die Einzelladungen, ein Beispiel für oben Gesagtes, als Dipol mit dem zweiten Ende in sehr großer Entfernung erscheinen, wodurch dann die elektrische Feldstärke über das Drehmoment hineinkommt. Man wird vielleicht über die Begründung dieses Vorgehens, nämlich „daß die Elektrizität sich immer[1]) aus entgegengesetzt gleichen Ladungen, d. h. Dipolen, zusammensetzt", zu streiten geneigt sein, man wird nur widerwillig die Einfachheit der Einführung in Kauf geben — ihr methodischer Vorteil, das ist die elegante und einheitlich durchgeführte Analogie zwischen elektrischen Dipolen und stationären elektrischen Strömen (2. Kapitel: „Elektrokinetische (magnetische) Wirkungen und Energieprinzip"), ist unbestreitbar. Das 3. Kapitel behandelt die Struktur der elektrischen und magnetischen Felder nach dem Äquivalenzprinzip, eben dem Prinzip von der Übereinstimmung des magnetischen Feldes eines elementaren Stromes mit dem elektrischen eines gleich orientierten und momentengleichen Dipols. Das 4. Kapitel, „Darstellung willkürlicher Systeme durch Multipole; Potentialtheorie" schließt, sehr abstrakt werdend, den Abschnitt.

Abschnitt 2 stellt die von der Zeit abhängigen elektromagnetischen Wirkungen in drei Kapiteln dar: 1. „Die allgemeinen Gesetze des elektromagnetischen Feldes", in dem die Behandlung des Oszillators und der elektromagnetischen Wellen neben manchem andern als besonders gelungen hervorgehoben sei; 2. „Das elektromagnetische Feld bewegter Punktladungen (Elektronen)" — hier unter anderm die Behandlung des punktförmigen Elektrons nach Liénard und Wiechert und nach Herglotz — und 3. „Energie und Bewegungsgröße bei zeitlich veränderlichen elektromagnetischen Erscheinungen; Dynamik der Elektronen", das z. B. die energetischen Probleme des punktförmigen und des nicht punktförmigen Elektrons, die Grundlagen der elektromagnetischen Theorie der Masse, die Kritik der Theorie der ausgedehnten Elektronen enthält.

Der dritte Abschnitt, „Die Relativitätstheorie", gibt erst eine Begründung der Theorie; hier wo man Verbundenheit mit dem Experimente weniger erwartet, kann man sich dem Genusse der gedrängten, formgewandten Darstellung ganz hingeben. Dann folgt die Anwendung der Relativitätstheorie auf die elektromagnetischen Erscheinungen und ein Kapitel über die relativistische Mechanik.

Dieser erste Band will, vergleiche seinen Untertitel, die Bewegungs- und Wechselwirkungsgesetze elektrisch geladener Teilchen untersuchen, ebenso wie man die Mechanik mit den entsprechenden Gesetzen ungeladener Partikeln beginnt. Und wie man hier zu den Modellen starrer und nichtstarrer Körper fortschreitet, soll der zweite Band der makroskopischen, der dritte der mikroskopischen Elektrodynamik der materiellen Körper gewidmet sein.

1) Vom Referenten gesperrt.

Buchwald.

A. Kistner, Deutsche Meister der Naturwissenschaft und Technik. 8°. I. Bd. 198 S. Mit 7 Bildnissen. II. Bd. 212 S. Mit 6 Bildnissen. 2. Aufl. München, Kösel & Pustet. 1925.

Das Werkchen erzählt in anregender und auch dem Laien verständlicher Weise von den Leistungen der deutschen Bahnbrecher: Copernicus, Kepler, Guericke, Leibniz, Goethe, Gauß, Liebig, Ohm, Mayer, Clausius, Bunsen, Kirchhoff, Helmholtz, Hertz, Gutenberg, Senefelder, Reichenbach, Fraunhofer, Borsig, Krupp, Siemens, Schichau, Otto und Langen, Lilienthal. Mit besonderer Sorgfalt ist jeweils der Zusammenhang des Lebenswerks mit der Folgezeit bis in die Gegenwart gezeigt. Eine Reihe von Bildnissen nach den Originalen des Deutschen Museums sind beigegeben.

E. Nies.

W. Gerlach, Materie, Elektrizität, Energie. Band VII der naturwissenschaftlichen Reihe wissenschaftlicher Forschungsberichte. 2. Aufl. Dresden u. Leipzig, Theodor Steinkopff. 1926. Gr. 8°. XII u. 291 S. Mit 119 Fig. Geh. M. 15.—, geb. M. 16.50.

Die erste Auflage dieses Buches wurde in dieser Zeitschr. **24**, 396, 1923 ausführlich besprochen, so daß wir uns mit einer kurzen Anzeige der von 195 auf 286 Textseiten erweiterten Neuauflage begnügen dürfen. Der überaus reichhaltige Stoff wird jetzt in 30 Kapiteln abgehandelt; die Darstellung ist lebendig und anregend, und durch ein recht ausführlich gehaltenes Sachregister wird eine rasche Orientierung wesentlich erleichtert.

Harry Schmidt.

Tagesereignisse.

„Ferienkurs". Im Zoologischen Institut der Universität Jena (Schillergäßchen) wird vom 26. bis 31. März 1928 der VII. Ferienkurs in Refraktometrie, Interferometrie und Spektroskopie abgehalten, unter Leitung von Prof. Dr. P. Hirsch, Oberursel i. Th. und Dr. F. Löwe, Jena. Die Kurse bestehen in täglich 2—3 Stunden Vortrag und 2—3 Stunden Übung. Anfragen und Anmeldungen sind bis spätestens 20. März an Herrn A. Kramer, Jena, Schützenstr. 72 zu richten, der auch auf Wunsch über Unterkunftsmöglichkeit (Studentenzimmer usw.) Auskunft erteilt. Die Teilnehmerzahl ist auf 50 begrenzt.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Erlangen Dr. Karl Kohl für Physik, an der Universität München Dr. Erich Lange für physikalische Chemie, an der Universität Wien Dr. Ing. Fritz Feigl für anorganische Experimentalchemie.

Ernannt: Der a. o. Professor an der Universität Freiburg (Breisgau) Dr. Robert Schwarz zum ord. Prof. der Chemie an der Universität Frankfurt a. M., der Dekan der Schule für Physik und Chemie am Pennsylvania State College Professor Dr. Gerald Wendt zum Direktor des Battelle Memorial Institute in Columbus (Ohio).

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.